MARIN ȚURLEA

FILOSOFIA MATEMATICII

Silviei,
Cu sentimente alese şi
profundă gratitudine

MARIN ȚURLEA

FILOSOFIA MATEMATICII

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREŞTI
2002

CUPRINS

CHAPTER I

PHILOSOPHY AND THE FOUNDATIONAL RESEARCH OF MATHEMATICS

1.1. Historical and philosophical Foundations of the foundational Research . . 13
1.2. Foundational Research of Mathematics: Foundations of Mathematics and Philosophy of Mathematics 17
1.3. Foundational Research, metamathematics and general Philosophy 31

CHAPTER II

ANCIENT HISTORY AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS: THEMATICAL, METHODOGICAL AND EPISTEMOLOGICAL PROFILE OF THE GREEK MATHEMATICS

2.1. The general Framework of the greek Mathematics 37
2.2. The Ontology of the ancient greek Mathematics 57
2.3. The greek Dialectis and Axiomatics 63
2.4. The pythagorean Mathematism 70
2.5. The Genesis and the Natura of the Number in Pythagora's view 75
2.6. Platon. Pytagoreism and Atomism 83
2.7. The Problem of mathematical Existence in Plato's Ontology 95
2.8. Plato's Philosophy of Mathematics as Dialectics or Metamathematics 106
2.9. Aristotle's Philosophy of Mathematics: The Problem of mathematical Existence and that of mathematical Infinity; The Nature of Mathematics 117
2.10. Aristotle's Theory of Science 128

CHAPTER III

MODERN PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

3.1. Stylistical profile of western Mathematics 135
3.2. The Carthesian Approach in the Methodology of Science 141
3.3. Descartes' View about the Nature of mathematical Reasoning 145
3.4. The „*Mathesis Universalis" Programme* 151
3.5. Leibniz's general philosophical Background: Metaphysics and Logic 154
3.6. Leibniz and the Programme of the unified Science (*Scientia universalis*); *Mathesis universalis* 158
3.7. Pascal's Preliminaries: Leibniz's Logicism; Leibniz – Forerunner of the modern Logicism 163
3.8. Leibniz about the Nature of Mathematics: Reason's Truths and Fact's Truths 168

CHAPTER IV

KANT'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

4.1. Kant's general Theory of Knowledge 172
4.2. Kant's Theory of mathematical Knowledge 177
4.3. The Nature of mathematical Arguments, of the mathematical Reasoning; pure Mathematics and applied Mathematics 189
4.4. Kantian Philosophy of Arithmetic 195
4.5. Kantian Philosophy of Geometry: Kantian Ontology of Space as a Geometry's Epistemology 200
4.6. Post-Kant Philosophy of Geometry: Helmholtz, HIlbert, Erdmann, Russell, Poincaré 207

CHAPTER V

THE PRESENT SITUATION IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

5.1. General Philosophy and Philosophy of Mathematics: Realism, Nominalism, Conceptualism 223
5.2. The Problem of Universals; Platonism and Nominalism; The logico-linguistical and epistemological Approach 228

5.3. The platonist and nominalist Reconstructions of Mathematics 235
5.4. The constructive Conceptualism: Han Wang 251
5.5. Logicism and intuitionism 259
5.6. The hilbertien formalist Programme. The hilbertien Formalism 272
5.7. Gentzen and Hilbert's Programme 281
5.8. Hilbert's Programme and the Significations of Gödel's Theorems 283
5.9. The Formalism - contemporary Philosophy of Mathematics 286
5.10. Where goes the *Problem of Foundation?* 303
Bibliography 317

CAPITOLUL I

FILOSOFIA ŞI CERCETAREA FUNDAŢIONALĂ A MATEMATICII

1.1. Fundamente istorice şi fundamente filosofice ale cercetării fundaţionale .. 13
1.2. Cercetarea fundaţională a matematicii: fundamentele matematicii şi filosofia matematicii 17
1.3. Cercetarea fundaţională, metamatematica şi filosofia generală 31

CAPITOLUL II

ISTORIA ŞI FILOSOFIA ANTICĂ A MATEMATICII: PROFIL TEMATIC, METODOLOGIC ŞI EPISTEMOLOGIC AL MATEMATICII GRECEŞTI

2.1. Cadrul general al matematicii eline 37
2.2. Ontologia matematicii greceşti antice 57
2.3. Dialectica greacă şi axiomatica 63
2.4. Matematismul pitagoreic 70
2.5. Geneza şi natura numerelor în concepţia pitagoreică 75
2.6. Platon, pitagoreism şi atomism 83
2.7. Problema existenţei matematice în ontologia platoniciană 95
2.8. Filosofia platoniciană a matematicii ca dialectică sau metamatematică ... 106
2.9. Problema existenţei matematice la Aristotel: infinitul matematic şi natura matematicii 117
2.10. Teoria aristotelică a ştiinţei 128

CAPITOLUL III

FILOSOFIA MODERNĂ A MATEMATICII

3.1. Profil stilistic al matematicii occidentale 135
3.2. Demersul cartezian în metodologia ştiinţei 141
3.3. Concepţia lui Descartes despre natura raţionamentului matematic 145
3.4. Programul *mathesis universalis* 151
3.5. Fundal filosofic general leibnizian: metafizica şi logica 154
3.6. Leibniz şi programul ştiinţei unificate (*scientia universalis*); *mathesis universalis* 158
3.7. Preliminarii pascaliene: logicismul leibnizian; Leibniz – precursor al logicismului modern 163
3.8. Leibniz despre natura matematicii: „adevăruri de raţiune" şi „adevăruri de fapt" 168

CAPITOLUL IV

FILOSOFIA KANTIANĂ A MATEMATICII

4.1. Teoria kantiană generală a cunoaşterii 172
4.2. Teoria kantiană a cunoaşterii matematice 177
4.3. Natura argumentelor matematice, a raţionamentului matematic; matematica pură şi matematica aplicată 189
4.4. Filosofia kantiană a aritmeticii 195
4.5. Filosofia kantiană a geometriei: ontologia kantiană a spaţiului, ca o epistemologie a geometriei 200
4.6. Filosofia postkantiană a geometriei: Helmholtz, Hilbert, Ueberweg, Erdmann, Russell, Poincaré 207

CAPITOLUL V

SITUAŢIA ACTUALĂ ÎN FILOSOFIA MATEMATICII

5.1. Filosofia generală şi filosofia matematicii: realism, nominalism, conceptualism 223

5.2. Problema universaliilor; platonism şi nominalism, abordare logico-lingvistică şi epistemologică 228
5.3. Reconstrucţiile platonistă şi nominalistă ale matematicii 235
5.4. Conceptualism constructiv: Han Wang 251
5.5. Logicismul şi intuiţionismul 259
5.6. Programul formalist hilbertian. Formalismul hilbertian 272
5.7. Gentzen şi programul lui Hilbert 281
5.8. Programul lui Hilbert şi semnificaţia teoremelor lui Gödel 283
5.9. Formalismul - filosofie contemporană a matematicii 286
5.10. „Problema fundării", încotro? 303
Bibliografie 317

CAPITOLUL I

FILOSOFIA ŞI CERCETAREA FUNDAȚIONALĂ A MATEMATICII

1.1. FUNDAMENTE ISTORICE ŞI FUNDAMENTE FILOSOFICE ALE CERCETĂRII FUNDAȚIONALE; MATEMATICĂ ŞI MISTICISM

Discuțiile şi controversele din domeniul filosofiei ştiinței sunt marcate tot mai mult, în ultima perioadă, de nevoia referinței la fundamentele istorice şi fundamentele filosofiei, până acum incursiunile în istoria gândirii trecând rareori dincolo de criticismul kantian. Ori, crede Beth [1, p. 2], rădăcinile ultime ale divergențelor actuale din fundamentele matematicii şi filosofia actuală a matematicii trebuie căutate mult mai profund, putând fi identificate în opera lui Aristotel şi Platon. Se ştie că Aristotel, sub influența filosofiei platoniciene, a elaborat o solidă şi chiar adecvată parțial teorie a ştiinței, care a dominat atâtea secole gândirea ştiințifică şi filosofică. Multe dintre diferențele de opinie din sfera investigațiilor filosofice şi fundaționale ale matematicii se pot explica ca o consecință a conflictului dintre rezultatele actuale (tehnico-matematice şi metamatematice) şi teze şi postulate ale concepției aristotelice despre natura şi structura ştiinței, în particular a matematicii.

Succint, teoria aristotelică a ştiinţei poate fi condensată în definiţia termenului de *ştiinţă deductivă*, sau, folosind terminologia Stagiritului, *apodictică*. În esenţă, conţinutul acestei teorii ar putea fi rezumat în următoarele aserţiuni: orice ştiinţă bine construită se caracterizează prin: 1) posedă o structură deductivă, o exigenţă reţinută în aşa-numitul *postulat de deductivitate*; 2) posedă principii acceptate ca autoevidente, ceea ce este formulat în *postulatul evidenţei*; 3) are o fundare empirică, conform *postulatului de realitate*.

Încă din antichitate doctrina aristotelică a ştiinţei a constituit obiect al discuţiei critice, reprezentanţii şcolii din Megara (întemeietorul acesteia, Euclid, afându-se într-o acerbă dispută cu Platon) i-au făcut o opoziţie sistematică; astăzi unii autori, ca Prantl, apreciază că obiecţiile formulate de megarici la adresa doctrinei aristotelice au o valoare minoră.

Teoria aristotelică a ştiinţei are o importanţă principală în domeniul fundamentelor ştiinţei, dar, oricum, comportă şi o relevanţă asupra matematicii, uneori şi explicit conturată atunci, când, incidental, Stagiritul invoca şi principiile matematicii în contextul polemicii cu pitagoreii sau platonicienii. Opinia lui Aristotel era că principiile matematicii (chiar şi ale matematicii pure) nu oferă o fundare adecvată pentru ştiinţa fizică.

Legat de problema *principiilor* ştiinţei, teoria aristotelică a ştiinţei asuma ca un ingredient fundamental o *metafizică* drept *ştiinţă a principiilor* (Cf. Aristotel [1]). Aristotel argumentează în lucrarea menţionată că metafizica oferă principiile de fundare a ştiinţelor particulare (speciale), deoarece datorită următoarelor trei motive ele nu-şi pot asigura singure fundamentele: a) riscul de a cădea în *cercul vicios*, atunci când încearcă să formuleze definiţii şi să producă demonstraţii; b) riscul *regresului la infinit;* c) intruziunile în alte ştiinţe, de unde să-şi împrumute propriile principii de fundare.

În concepţia lui Aristotel, metafizica era considerată un gen de cunoaştere de ordinul cel mai înalt, care practica investigaţia fundamentelor ştiinţei. *Filosofia primă*, ştiinţa fundamentală (a primelor principii), era considerată, în perspectiva doctrinei

aristotelice, un domeniu al ştiinţei pure. Şi cum filosoful grec a avut în vedere ştiinţa fizică, principiile acesteia, se explică uşor atât designaţia termenului „*metafizica*", care, chiar din antichitate, a înlocuit pe cel de „*filosofia primă*", cât şi legitimitatea şi succesul carierei, tradiţiei, pe care a făcut-o.

Tradiţia termenului „*metafizică*" inaugurată printr-un program care iniţial desemna un domeniu de cercetare a principiilor ştiinţei, marchează, în sens aristotelic, o îngustare a semnificaţiei, căci înseamnă numai o investigaţie a principiilor fizicii, ca, ulterior, să revină, prin extensie, la accepţia iniţială: „*Metafizica moravurilor*" (Kant), „*Metafizica matematicii*" (Gauss), „*Metafiziça calculului infinitezimal*" (Cournot). Dar, în perioade mai recente, termenul „metafizică" a fost întrebuinţat pentru a desemna o teorie a «*suprasensibilului*», ceea ce a reabilitat sensul iniţial, dacă avem în vedere că Platon şi Aristotel situau principiile „*Sensibilului*" în sfera „*Suprasensibilului*". În ceea ce îi priveşte pe membrii „Cercului de la Viena" ei au acordat termenului „*metafizică*" o semnificaţie exclusiv peiorativă şi, anume, ar desemna „*doctrine fără semnificaţie ştiinţifică*".

Dacă este evident că, de altfel, cunoaşterea ştiinţifică este produsă prin intermediul inferenţei logice, pornind de la *principii* ireductibile, atunci problema care rămâne de rezolvat este aceasta: de unde procură oamenii aceste *principii*? Aristotel era convins că aceste principii se obţin printr-o *viziune intuitivă*, ce îşi are originea în inducţia bazată pe percepţia senzorială; o doctrină, notează Beth [1], ce are un interesant fundament teologico-antropologic. Urmând, în general, analizele lui Beth [1, p. 34], demersul aristotelic este acesta: fenomenele perceptibile sunt manifestări ale raţiunii cosmice (Nŏus) cu care este înrudită mintea umană, aceasta din urmă fiind condusă de la percepţiile senzoriale la cunoaşterea cauzelor ascunse în spatele lor, tipul acesta de inducţie ducând în final la viziunea intuitivă a principiilor. Doctrina aristotelică a ştiinţei nu considera că principiile ştiinţei cer o investigare sistematică, fiind suficientă numai o inspecţie sumară a fenomenelor perceptibile şi,

mai mult, filosoful profesionist nu are un rol privilegiat în cadrul acestei activități de cunoaştere, el procedând mai mult doxografic, un obicei al peripateticienilor, admirabil ilustrat de însuşi Aristotel.

O serie de interpreți ai operei aristotelice identifică analogii între teoria aristotelică a ştiinței şi doctrinele mistice, metafizica lui Aristotel constituind o inițiere intelectuală, contraparte a inițierilor din cultele misteriilor, care îl eliberează pe om de permanenta uluire în fața unui destin inconstant, oferindu-i o explicație definitivă şi irevocabilă a experiențelor sale (Cf. Beth [1]). Metafizica, continuă autorul olandez, ca o ştiință a principiilor, ne oferă printr-o explicație similară înțelepciunea supremă şi fericirea, omul este inițiat în misterele vieții şi obține *nemurirea.* Conform doctrinei lui Platon şi a lui Aristotel [2] omul trebuie să fie *aruncat în perplexitate* în scopul de a putea obține *viziunea intuitivă* a principiilor, tot aşa cum în misteriile antice omul trebuia să sufere o moarte rituală pentru a accede la viața eternă. Metafizica era considerată inaccesibilă învățământului public, metafizicianul era un om inițiat în misterele existenței, dispunând de cheia enigmei vieții, conchide Beth [1]. Demonstrația sau analiza logică se puteau învăța, şi un maestru accepta să-l învețe pe învățăcel acestea, dar refuza abordarea „*inteligibilului*" pe calea contemplațiilor imediate, distingându-se aici ferm între elementul (aspectul) didactic, profan şi cel inițiatic, o dovadă că chiar din antichitate a fost conştientizată analogia dintre *metafizică* şi *misticism.*

Am ilustrat nevoia conştientizării celor două tipuri de fundamente – istorice şi filosofice – făcând o scurtă incursiune în opera lui Aristotel, poate prin contrast cu supralicitarea mai recentă a operei lui Kant. Desigur, în limitele analizei fireşti am făcut referiri la *platonism* şi mai vagi la *pitagoreism,* cu un caracter mai mult implicit, în vederea conturării teoriei aristotelice a ştiinței care este, probabil, prima doctrină articulată coerent nu numai gnoseologic ci şi metodologic, părți semnificative ale ei fiind astăzi preluate intact. Dar noi conştientizăm că aici am oferit doar o ilustrare a acestei abordări pe un caz, ce urmează să fie explicitată şi detailată ulterior, completată cu expunerea altor doctrine filosofice cu rezonanțe istorice.

1.2. CERCETAREA FUNDAȚIONALĂ A MATEMATICII: FUNDAMENTELE MATEMATICII ŞI FILOSOFIA MATEMATICII

Cercetarea fundațională a matematicii conectează cinci domenii de gândire: 1) matematica propriu-zisă; 2) fundamentele matematicii; 3) metamatematica; 4) filosofia matematicii; 5) filosofia generală.

Cercetarea fundațională este considerată un gen de cunoaştere de gradul al doilea ce se exersează asupra uneia preexistente, mai exact, asupra fundamentelor teoretice ale acesteia. În acest sens spunem că cercetarea fundațională este o întreprindere intelectuală complexă, atât analitică cât şi constructivă, incluzând, în esență, două tipuri de activități: unele *critice* (analiza critică a fundamentelor), altele *constructive*, constând în reconstrucția explicită a acestora (M. Bunge [1]). Cercetarea fundațională a matematicii, de asemenea, implică aceste două tipuri de activități: i) *critice* şi ii) *constructive*, semnificând o adaptare a acestora la profilul şi specificul acestei ştiințe. Activitățile *critice* cuprind analiza critică a fundamentelor conceptuale ale cunoaşterii matematice, a chestiunilor conceptuale ale ştiinței, ca, de exemplu, statutul conceptelor fundamentale, al formulelor de bază ca şi al procedurilor întrebuințate, şi toate acestea sub intenția eliminării vaguității şi inconsistenței. Se remarcă uşor că aceste activități implică direct *analiza conceptual-filosofică*, conturând suficient de relevant rolul filosofiei în cercetarea fundațională. Cel de-al doilea aspect al cercetării fundaționale – *activitățile constructive* – oferă o *reconstrucție fundațională*, identifică teorii fundamentale, sau intersecții ale acestora, apte să permită reconstrucția unei părți largi a matematicii efective, propriu-zise, ceea ce constituie, evident, un aspect major al oricărei cercetări fundaționale a matematicii.

Aşa cum am arătat în altă parte (Țurlea [1, p.24], uzul expresiei „*fundamentele matematicii*" este inconstant şi, chiar, ambiguu, căci uneori ea desemnează partea matematicii cu care începe construcția ei,

„aria" pe care se edifică domeniile matematicii propriu-zise; alteori, expresia semnifică un gen de comentariu din exterior asupra matematicii, menit să ofere o explicație în termeni filosofici a naturii și semnificației matematicii. Riguros vorbind, ni se pare că în a doua accepție expresia în cauză cuprinde și filosofia matematicii, pe care o analiză exactă trebuie să o separe ca o componentă, domeniu distinct al gândirii matematice. Poate, mai curând, trebuie să rezervăm „*fundamentelor matematicii*" prima accepție, ceea ce denotă ca relevant pentru ele în primul rând un element de *construcție matematică*, așa cum un element de *analiză filosofică* caracterizează domeniul filosofiei matematicii. Oricum, putem accepta că „*fundamentele matematicii*", probabil „*nucleul*" cerccetării fundaționale a matematicii, pot fi definite ca un ansamblu de activități constructive – al căror specific, caracterizat de noi printr-o „tehnică fundațională" (Țurlea [2, p. 210]" – comportă un înalt grad de „tehnicalitate", proceduri și tehnici cu un caracter matematic sau aparținând logicii algebrice. În acest sens, H. B. Curry [1] menționează logica matematică ca un intrument necesar în abordarea fundamentelor matematicii, iar Henkin [1] descrie și pledează în favoarea utilității logicii algebrice în studiile fundaționale. În virtutea unui asemenea specific, astăzi, „*fundamentele matematicii*" sunt considerate ca o ramură a matematicii, stimulând și interesul așa-numiților „*matematicieni care lucrează*" (working mathematicians), care, în general vorbind, ignoră *problema fundării* matematicii.

Așadar, *analiza fundațională* a matematicii (deci, *cercetarea fundațională* a acestei științe) comportă două componente inalienabile – „*tehnică fundațională*" și ceea ce noi am numit „*relevanță filosofică*. Tehnica fundațională (înalt relevantă pentru fundamentele matematicii) coincide cu tipul constructiv de studii metamatematice asupra matematicii, care constau în folosirea procedurilor, metodelor și tehnicilor cu caracter matematic și/sau logico-matematic în strânsă relație cu practica matematică, motiv de simpatie și adeziune a „matematicienilor lucrători" la acest fel de activitate fundațională, ceea ce contrastează cu atitudinea lor față de studiile de filosofia matematicii. Cealaltă

componentă, numită „*relevanță filosofică*", asumă preponderent activități critice, care în mod esențial constau în analize neformale şi aparțin filosofiei. Deşi noi distingem analizele neformale (adică relevanța filosofică) de activitățile constructive metamatematice, marcate de un pronunțat aspect tehnic-formal, în lucrarea noastră (Țurlea [1]) am insistat asupra permeabilității reciproce, a acestor categorii ale cercetării fundaționale, afirmând că ele se condiționează una pe alta, aceste domenii se „penetrează" reciproc continuu. În context putem constata efectul benefic al activității fundaționale asupra ştiinței respective (în acest caz matematica), o caracteristică a ştiinței în actualul stadiu de dezvoltare fiind propria ei capacitate de a participa la elaborarea propriilor ei fundamente şi clarificarea statutului entităților cu care lucrează, un fel de împlinire a idealului hilbertian: „să mutăm odată pentru totdeauna *fundamentele* matematicii înăuntrul ei".

A. Mostowski [1] vorbind oarecum indistinct despre fundamentele matematicii remarca prezența în structura acestora a două aspecte: unul filosofic şi altul matematic şi ilustrează acest lucru schițând tabloul actual al problemelor fundaționale. Astfel el distinge câteva clase şi subclase de probleme fundaționale: A) Ce natură au noțiunile matematicii, în ce măsură ele sunt construcții umane, în ce măsură ne sunt impuse din afară, care este izvorul cunoaşterii proprietăților lor? ; B) Ce natură au demonstrațiile matematice şi care sunt criteriile care ne permit să deosebim pe cele adevărate de cele neadevărate? Mostowski [1] face observația că asemenea chestiuni au prin excelență un caracter filosofic şi este greu de imaginat că ele ar putea fi rezolvate exclusiv cu metode matematice; detectăm aici o semnificație contrară concepției hibertiene după care problema *fundării* trebuie să fie exclusiv de competența internă a matematicii, prin apel numai la metode şi proceduri matematice. Pe acest fundal fundațional Mostowski distinge şi următoarele subclase de probleme cu un caracter mai special: A_1) Metoda axiomatică, rolul ei în matematică şi limitele aplicabilității ei; A_2) Curentele constructiviste în matematică; B_1) Axiomatizarea logicii; B_2) Probleme de decidabilitate. Este evident că problemele A_1) şi A_2) – accesibile cercetării matematice

– au apărut pe baza chestiunii A), iar problemele B_1) şi B_2) în legătură cu B); un fenomen firesc, particularitate a progresului ştiinţific şi cultural contemporan, constând într-o „transmutare" a problemelor cu caracter filosofic în domeniul asociat, aici, cel al matematicii. Dar mult dorita *separare „hilbertiană"* a matematicii (mai exact a *fundamentelor* acesteia) de *filosofie* nu s-a putut realiza niciodată, în ciuda progresului fundaţional, căci pe de o parte, aşa cum am remarcat (Ţurlea [1, p. 48]), se constată o înflorire a problematicii ştiinţifice (matematice) în mediul problemelor filosofice, ca în exemplul de mai sus, iar, pe de altă parte, contrar opiniei lui Hilbert, rolul filosofiei în ştiinţă, în speţă în matematică, în edificarea acesteia, este, aşa cum remarca Suppes [1, p. 70], să clarifice problemele conceptuale şi să expliciteze supoziţiile fundamentale ale fiecărei discipline ştiinţifice. Clarificarea problemelor conceptuale sau construirea unor fundamente logice explicite sunt sarcini care nu au un caracter intrinsec, nici empiric, nici matematic. Ele pot fi considerate ca o sarcină filosofică propriu-zisă, direct relevantă pentru ştiinţă. Aceste permanente „intruziuni" ale domeniilor – fundamente şi filosofia matematicii – cunosc, deci, ambele săgeţi ale „transferului": de la fundamente la filosofia matematicii şi am ilustrat prin rolul formalizării şi axiomatizării în discursul filosofic, care ne propune o înţelegere adecvată a fundamentelor matematicii, mai general, a *naturii şi semnificaţiei matematicii*, potenţând remarcabil analiza şi dezbaterea filosofică; de la filosofia matematicii la fundamentele matematicii, ca în cazul anterior al analizei tabloului fundaţional al matematicii, când se învederează rolul fecund al problemelor filosofice în spaţiul cercetării fundaţionale metamatematice.

Deci, chiar şi din enumerarea listei de probleme fundaţionale dată de Mostowski [1], putem să identificăm *obiectul de investigaţie* (tipul de probleme) al celor două domenii ale gândirii metamatematice - fundamentele matematicii şi filosofia matematicii. Oricum, la acest punct, putem spune ceva suficient de precis despre *obiectul* (problemele), filosofiei matematicii: această disciplină procedează la o analiză filosofică a naturii şi statutului noţiunilor, ipotezelor (axiomelor) şi demonstraţiilor

matematice, sau, cu alte cuvinte, abordează problema naturii şi a semnificaţiei entităţilor matematice. (Nu vrem să spunem prin aceasta că diferitele sisteme axiomatice-fundaţionale ale matematicii, de exemplu, de teoria numerelor, teoria mulţimilor nu abordează şi ele problema *statutului*, dar n-am zice şi pe cea a *naturii* entităţilor abstracte cu care operează matematica). Legat de obiectul de investigaţie al acestor domenii de gândire metamatematică menţionăm *structura* şi *profilul* lor, *perspectivele* şi *modalităţile* lor de abordare şi ultima, care priveşte *rezultatele* acestor două tipuri de abordare, relaţia lor din acest punct de vedere. Înainte de a aborda aceste probleme să enunţăm, după A. Robinson [1], clase de probleme fundaţionale relevante pentru actualul tablou al matematicii şi care, în fapt, aşa cum am arătat (Ţurlea, [1, p. 49]), sunt exemplificări din lista formulată de Mostowski [1]. Dacă omitem distincţia propusă de noi: fundamentele matematicii şi filosofia matematicii, atunci, aşa cum deja am notat, problemele (A) şi (B) din lista lui Mostowski sunt tipic relevante pentru ultima. Răspunsul privind obiectul fundamentelor matematicii este, credem, mai uşor de dat, deoarece în aria de investigaţie a acestei discipline cad toate problemele fundaţionale, inclusiv cele care sunt tipice pentru filosofia matematicii, sau cele care au doar o relevanţă pentru aceasta din urmă; aşadar, în sens larg, aria fundamentelor matematicii o include şi pe cea a filosofiei matematicii; da, în sens larg, dar nu şi la rigoare, când trebuie să trasăm o distincţie între aceste două domenii. Expunând lista lui A. Robinson ilustrăm spectrul problematic fundaţional, adică conturăm „aria" fundamentelor matematicii şi în acelaşi timp identificăm conexiunile acestora cu domeniul filosofiei matematicii. Am văzut, examinând lista lui Mostowski, ce clase de probleme aparţin filosofiei matematicii; iată după A. Robinson [1] ilustrări ale acestora: problema existenţei mulţimilor nenumărabile, teorema de bună ordonare, teorema lui Gödel de incompletitudine asupra aritmeticii lui Peano, problema existenţei modelelor nonstandard ale teoriei numerelor. O clasă de probleme reţine dinamica, mutaţiile şi progresele în domeniul fundaţional în esenţă şi în fapt, un transfer, „*o transmutare*" din sfera filosofiei matematicii în sfera

fundamentelor matematicii şi anume: explicaţii ale unor *concepte fundaţionale*, ca de exemplu conceptul Cantor-Frege-Russell de „*număr cardinal*", conceptul de „*deductibilitate*" în calculul de predicate de ordin inferior, conceptul de *calculabilitate"*, conceptul de „*adevăr*". Există, însă, o clasă de subiecte care au relevanţă pentru filosofia matematicii: *iraţionalitatea lui* $\sqrt{2}$, *transcendenţa lui* π, existenţa g*eometriilor neeuclideene, fundamentele calculului diferenţional* şi *integral, natura conceptelor topologice şi categoriale, aplicarea legilor lui Kepler la universul fizic*. În fine, există o clasă de probleme care vizează *natura entităţilor matematice*, care prin excelenţă constituie *nucleul filosofiei matematicii*, câmpul de confruntare al celor mai influente şi de prestigiu şcoli şi curente filosofice: *logicismul, formalismul, intuiţionismul, empirismul logic*. Prin urmare, în sens larg, ansamblul problematic expus ţine de componenţa fundamentelor matematicii; dar, în sens riguros, identificăm probleme specifice filosofiei matematicii – este cazul claselor A) şi B) din lista lui Mostowski şi mai cu seamă clasa de probleme ce vizează natura entităţilor matematice, din lista lui A. Robinson. Trebuie notat că această ultimă clasă de probleme conectează cercetarea fundaţională a matematicii de filosofia generală, sau speculativă, cum mai este numită de unii autori.

Dar să revenim la grupul problematic, invocat ceva mai înainte, care ne ajută să trasăm distincţia dintre fundamentele matematicii şi filosofia matematicii, din care am examinat numai problema*obiectului* (sau a *tipului de probleme*) al acestor domenii. Să lăsăm pentru mai târziu problema *structurii* (profilului) acestor domenii fundaţionale şi să spunem câteva lucruri despre ultimele două probleme: cea a*perspectivelor*, modalităţilor *de abordare* a chestiunilor fundaţionale şi cea referitoare la *rezultatele* pe care munca fundaţională le-a realizat în *fundamentele matematicii* şi *filosofia matematicii*, a relaţiei dintre aceste rezultate. Spunem că doar vom creiona aceste aspecte, deoarece aceste probleme revin, sunt atacate şi cu ocazia investigării structurii acestor discipline-componente ale cercetării fundaţionale. Concret, în lucrarea noastră (Ţurlea [1]), am distins două metode-modalităţi, perspective de abordare inerente acestor două

domenii de investigație fundațională, şi anume o *abordare fundațională*, proprie fundamentelor matematicii, efectuată din perspectiva unor sisteme fundaționale de teoria numerelor, teoria mulțimilor, teoria categoriilor, sau a unor sisteme de geometrie etc. şi o altă abordare, *fundaționistă*, specifică filosofiei matematicii, relevantă mai cu seamă în ceea ce piveşte natura entităților matematice, abordare de tip „absolutist", din perspectiva unor programe fundaționaliste ca logicismul, formalismul, intuiționismul. Dacă abordarea *fundațională* are un caracter „neutral" şi apelează la tehnici, metode, proceduri logice, de teoria modelelor şi chiar matematice, este mai în acord cu/şi sensibilizată la practica matematică, în general fiind mai curând *descriptiv* relevantă privind rezultatele matematicii propriu-zise; abordarea *fundaționistă* poartă o pregnantă „încărcătură" filosofică concentrată în semnificative teze „absolutiste" cu privire la natura matematicii, comportând în mare măsură un caracter normativ, „coercitând" entitățile matematice să intre ca într-un „pat al lui Procust" în canaveaua sistemelor fundaționiste, considerent pentru care i s-a reproşat o prea sofisticată prizare la ceea ce matematicienii activi fac în practica lor curentă; de unde şi dezinteresul acestora pentru acest gen de studii fundaționale. Dar la acest lucru a contribuit şi o aşa-zisă „*asimetrie*" a *rezultatelor* obținute în aceste domenii de cercetare fundațională (fundamentele matematicii şi filosofia matematicii). Progresele din domeniul fundațional au marcat această „asimetrie" şi ca să dăm un exemplu, în virtutea teoremei de incompletitudine a lui Gödel, conceptul de deductibilitate a fost formalizat, devenind astfel un concept matematic, care rămâne, însă, în continuare, relevant pentru filosofia matematicii; este aici observată o „deplasare" de la studiul filosofic la cel matematic, o evidentă „asimetrie" între *analiza filosofică* şi *construcția matematică*. Într-adevăr, examinarea situației actuale a tabloului problemelor fundaționale, a progresului fundațional al matematicii conduce la concluzia că *bogăția de rezultate metamatematice* n-a fost însoțită, din nefericire, de studii în care discuția şi analiza filosofică să expliciteze „substanța" lor, o excepție constituind celebrele lucrări ale lui Gödel [1], [2].

Revenim acum la *problema structurii* (profilului) celor două domenii - fundamentele matematicii şi filosofia matematicii. În ceea ce priveşte structura fundamentelor matematice, datorăm lui Kreisel [1] o interesantă, relevantă şi fecundă distincție: *fundamente logice* şi *fundamente matematice,* fiecare gen de fundamente având contribuție specifică în analiza şi fundarea matematicii. Astfel, fundamentele logice au de-a face cu reconstrucția „anteriorității logice", (în sensul lui Tarski [1]), a teoriilor matematice şi cu definirea conceptelor metamatematice folosite în analiza fundațională. Aşa cum am scris în (Țurlea [1]) *fundamentele logice* au ca un concept specific „*demonstrația*" şi în acest sens problema *validității* principiilor matematice (axiome, postulate, reguli) aparține, de asemenea, acestui gen de fundamente. Fundamentele logice abordează discursul în care se instalează teoria matematică ignorând subiectul ei specific, căci, aşa cum spune Nagel [1], matematica are un caracter abstract, ceea ce motivează definiția ei metaforică de „arhitectură de demonstrații", un argument în favoarea prezenței fundamentelor logice în ansamblul fundamentelor matematicii, în construcția acestei discipline ştiințifice. Din perspectiva fundamentelor logice este mai semnificativă *structura* enunțurilor matematicii, sau a unei teorii matematice, decât *natura* specifică a subiectului particular asupra căreia aceasta poartă. Studiile fundaționale abilitează remarcabil relevanța conceptului de „completitudine" (incompletitudine), care stabileşte conexiuni demne de investigații în planul fundamentelor, căci în virtutea teoremei lui Gödel, se produce separarea a două concepte de înaltă statură teoretică – „adevăr" şi „demonstrabilitate"; se stabilesc în fapt vocații şi competențe oarecum complementare pentru cele două tipuri de fundamente ale matematicii: fundamente matematice şi fundamente logice; de fapt o consecință a „asimetriei" relației propoziție *adevărată* - propoziție *demonstrabilă*, ştiut fiind că nu orice propoziție adevărată este şi demonstrabilă. Urmează că în timp ce conceptul de „demonstrație" este privilegiat în cercetările din perspectiva fundamentelor logice, conceptul de „adevăr" este, evident, favorizat de perspectiva fundamentelor matematice.

Fundamentele matematice admit conceptul de „validitate" ca aparținând fundamentelor logice şi se ocupă de problema „*organizării*" teoriilor sau, chiar a „regiunilor" matematicii. Aspectele relevante pentru acest gen de fundamente sunt caracterul sistematic, claritatea şi inteligibilitatea şi, în acest caz, abordarea din această perspectivă este una *comprehensivă*, spre deosebire de cea specifică fundamentelor logice, care este prin excelență *formală*. Oricum, problema *conținutului* (distinctă de cea a *formei*, care cade în competența fundamentelor logice) este preferată în fundamentele matematice, intenția fiind ca o serie de concepte, rezultate să fie prezentate în termenii conceptelor originale, fundamentale ale teoriei respective, astfel teoria categoriilor favorizează abordarea în termenii conceptelor de „funcție", „compunere" preferate unor concepte ca „mulțime", „apartenență", remarcă Kreisel [1].

Pentru dezvoltări ale aspectelor aflate aici în discuție trimitem la lucrările noastre – Țurlea [1], [3] – aici mulțumindu-ne să mai adăugăm că uneori contribuția constructivă a *fundamentelor matematicii (fundamente logice + fundamente matematice)* în cadrul cercetării fundaționale vizează identificarea şi/sau edificarea anumitor teorii şi structuri matematice, ce pot servi reconstrucției fundaționale, chiar a întregului edificiu al matematicii; programul *structuralismului matematic* (N. Bourbaki) este semnificativ în această privință.

Despre *filosofia matematicii* vom menționa doar că nucleul ei îl constituie o concepție filosofică (platonism, formalism, intuiționism etc.) „garnisită" tehnic cu metode, proceduri şi tehnici care sunt în principal de factură semantică, menite să expliciteze, în contextele analizelor şi explicațiilor conceptuale, neformale, *substanța filosofică* a rezultatelor teoriei sau a ansamblului de teorii matematice.

Deşi am susținut existența unui grup de distincții teoretice şi conceptuale, acest fapt este compatibil cu un fel de contacte reciproce dintre cele două domenii – fundamentele matematicii şi filosofia matematicii – în sensul că menirea a ceea ce am numit „relevanța filosofică" (în fapt activitățile specifice filosofiei matematicii) este să expliciteze „*substanța*" filosofică, care impregnează chiar fundamentele

matematicii. Astfel, de exemplu, justificarea „axiomei infinitului", ce cade în sfera fundamentelor logice ale matematicii, sugerează angajamentele „ontice" ale teoriei mulțimilor. Observăm existența unor zone de „interferență" a *fundamentelor logice* (ce au de-a face cu problema validității axiomelor teoriilor) cu *asumpții ontologice* ale teoriilor matematice, asumpții cu relevanță filosofică, primele fiind adesea un „*travesti*" al acestora din urmă, ceea ce sugerează că aceste discipline fundaționale, (fundamentele matematicii şi filosofia matematicii), nu sunt chiar aşa de „*pure*" aşa cum, eventual s-ar pretinde în virtutea caracterului prea tranşant al menționatelor distincții. Dar un fapt şi mai remarcabil este particularitatea teoriilor matematice de a purta asupra unui univers de discurs, (o lume ontologică), ceea ce trimite în mod cert la constatarea că trebuie admis că ele asumă nişte presupoziții filosofice (ipoteze ontologice) privind problema realității (existenței) în matematică. În lucrarea noastră (Țurlea [1, p. 67]) notăm cu privire la acest aspect: „este natural ca teoriile matematice să comporte anumite presupoziții filosofice, reconstrucția fundațională a lor explicitându-le prezența în structură a unui „*strat ontologic*", aşa numitul *formalism „metafizic"* (ontologic), mai evident în teoriile fizice sub forma unei mulțimi de *asumpții de interpretare*". Prin urmare, putem conchide că aceste contacte reciproce dintre fundamentele matematicii şi filosofia matematicii au generat „infiltrații" tacite ale filosofiei la nivelul fundamentelor matematicii, despre care, cum am mai spus, nu se mai poate zice că sunt „pure", aşa după cum la nivelul filosofiei matematicii constatăm „*împrumuturi*" *conceptuale şi metodologice* (axiomatizarea, formalizarea, metode semantice etc.) ce vin dinspre primele cu rol fertil în plan ştiințific şi chiar pedagogic.

Evident că asemenea „impurități" detectate la nivelul celor două discipline ale gândirii matematice nu anulează specificitatea lor şi anume *programele fundaționale*, operante în cadrul *fundamentelor matematicii*, sunt centrate pe elemente logice şi tehnico-matematice, metamatematice, în timp ce *programele, concepțiile fundaționiste* (logicism, formalism, intuționism, ca să le numim pe cele fundamentale şi de prestigiu în

domeniu) sunt bazate pe elemente filosofice, asumând totdeauna un „nucleu doctrinar" referitor la natura şi statutul entităţilor matematice. Marile programe fundaţioniste, mai sus enumerate, au ca particularitate distinctivă şi comună faptul de a se constitui în teze filosofice general „absolutiste" despre problema *existenţei în matematică.* Acest „*absolutism*" vizează un aspect real al cunoaşterii matematice, respectiv *logica* (în cadrul logicismului), *limbajul* (în cazul formalismului) şi *intuiţia, construcţia* (în cazul intuiţionismului). Însă în cadrul acestor programe trebuie să distingem prudent între aspectul filosofic, la care ne-am referit, şi cel tehnico-metodologic, metateoretic, care le-a asigurat un destin prestigios în istoria matematicii şi logicii şi le-a conferit valoare şi importanţă în contextul contemporan al investigaţiilor fundaţionale.

H. Mehlberg [1] a pledat în filosofia matematicii pentru un punct de vedere pe care l-a numit *logicism pluralist,* pe care l-a văzut validat de o serie de rezultate metamatematice şi metalogice (relaţii de intertraducere, concepţia semnatică a lui Tarski despre adevărul matematic, teorema de deducţie Hebrand-Tarski, conceptul intuiţionist de constructibilitate; pentru o expunere succintă a acestor rezultate, vezi Ţurlea [3]), şi în consecinţă în acord cu practica curentă a matematicienilor care lucrează efectiv în domeniul matematicii propriu-zise. În concepţia lui H. Mehlberg [1] acest punct de vedere, mai curând *fundaţional* decât *fundaţionist*, şi poate tocmai de aceea, ar putea constitui o bază comună şi de convergenţă pentru cele trei concepţii – curente rival competitive: logicismul, formalismul, intuiţionismul. În perspectivă fundaţională, deci din interiorul nu al filosofiei matematicii, ci dinăuntrul fundamentelor matematicii, L. Henkin [1] a încercat o abordare care să înlocuiască perspectivele logicistă, formalistă, intuiţionistă –, unilateral absolutiste şi pregnant filosofice, determinaţii ce le fac inadecvate pentru o reconstrucţie relevantă a matematicii, – cu o *schemă conceptuală* neutră filosofic, care reţine numai aspecte *set-teoretice* (contrapartea fundaţională a celei fundaţioniste-logiciste), *aspecte algebrice* (corespunzătoare formalismului) şi *aspecte constructive,* care, relevând spiritul de cercetare ce a motivat concepţia lui Brouwer, ar putea fi un

substitut adecvat pentru intuiționism. Audiența la practica științifică, în virtutea caracterului familiar al schemei fundaționale propuse de Henkin, ca și a proceselor de „tranziție" de la filosofic la științific, urmare a abandonării schemelor apriori și chiar necesitariste, inerente marilor programe fundaționiste (logicism, formalism, intuiționism) și care le-au „frustat" de prizare și adecvare la matematica efectivă pare să fi motivat opțiunea lui Henkin.

În ceea ce privește marile *programe fundaționale,* care țin evident de *fundamentele matematicii,* se poate susține că în principal ele au fost „focalizate" asupra teoriei mulțimilor, teoriei structurilor (N. Bourbaki) teoriei categoriilor, și chiar geometriei etc., deși aceasta poate fi abordată în termenii teoriei mulțimilor. În cele ce urmează, deoarece *teoria mulțimilor* și *teoria categoriilor* au profunde implicații filosofice, fapt ce „aruncă" noi lumini inclusiv asupra filosofiei matematicii, facem unele remarci general-fundaționale, care vor contura mai pregnant ideea că filosofia este prezentă sub forma unor supoziții, de regulă ontologice, chiar la acest nivel, fundația „subminând" din interior ideea unei așa-zise „purități" și „exclusivități" a celor două domenii ale activității fundaționale.

Particularitatea distinctivă a *programelor fundaționale* este continua, permanenta racordare a lor la marile „mutații" înregistrate prin progresul activității fundaționale și care au marcat „o pierdere perțială a caracterului filosofic al investigațiilor fundaționale" în favoarea unui mai pronunțat caracter matematic al acestora, așa cum remarca A. Mostowski [1]. Și, totuși, specificitatea marcat fundațională a acestor programe din domeniul fundamentelor matematicii nu exclude „*de plano*" prezența elementelor filosofice, fiind vorba, mai curând, de o diminuare a rolului acestora. Căci, astfel, teoria mulțimilor (în diferitele ei variante axiomatice: Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Gödel, Bernays, Quine și altele) posedă o remarcabilă relevanță ontologică conectată problemei existenței în matematică, un mediu autentic care favorizează analizele și discuțiile filosofice. În contrast, celelalte două teorii – *teoria structurilor* (Bourbaki) și *teoria categoriilor* au mai cuând, am spune, o „încărcătură" epistemologică, sugerându-ne ideea unei ierarhii a construcțiilor

conceptuale în matematică, ce au erodat vederile tradiționale, în majoritatea lor „substanțialist-platoniste" asupra matematicii.

Între cele trei mari teorii - *teoria mulțimilor, teoria structurilor* și *teoria categoriilor* care lansează „stiluri fundaționale" (așa cum marile programe fundaționiste – logicismul, formalismul și intuiționismul– au generat „stiluri fundaționiste") – există conexiuni istorice și logice, încât se poate ușor constata că noțiunile categoriale sunt implicite în teoria structurilor, iar în virtutea maturizării conceptuale și metodologice a teoriilor matematice vedem manifestă ideea că unele concepte din teoria categoriilor sunt „generalizări raționale" ale celor din teoria structurilor; morfismele sunt generalizări ale aplicațiilor continue (din teoria mulțimilor), a homomorfismelor (teoria grupurilor), a homeomorfismelor (teoria spațiilor topologice), acestea din urmă aparținând teoriei structurilor. Eficiența și fructuozitatea stilului fundațional categorial s-au învederat în capacitatea teoriei categoriilor de a soluționa probleme în fața cărora celelalte teorii s-au aflat în impas. Această *teorie* (a *categoriilor*) comportă prin excelență un aspect structural relevant pentru „*arhitectura*" și „*organizarea*" universului matematic, elemente ce i-au conferit posibilitatea de a se constitui într-o *nouă paradigmă* conceptuală și metodologică a matematicii, distinctă și rivală în raport cu *paradigma* „*ansamblistă*" (din teoria mulțimilor), din care, paradoxal, s-a născut. Relevanța fundațională a teoriei categoriilor se învederează prin surprinderea caracterului structural al matematicii contemporane (în plan matematic) și prin depășirea viziunii filosofice pronunțat platonist-substanțialiste asociate, cel puțin subiacentă, paradigmei set-teoretice, dominantă în gândirea matematică, încă de la începutul acestui secol și până în deceniile recente. Confruntarea dintre aceste stiluri fundaționale a fost marcată de diferite tentative: i) construirea de fundamente set-teoretice (ansambliste) pentru teoria categoriilor; ii) fundamente categoriale pentru teoria mulțimilor; iii) autofundarea teoriei categoriilor.

Specificitatea tehnico-matematică a cercetării fundaționale, mutație legată nu atât, am spune, de programele fundaționiste (în general doctrinar filosofice, precum logicismul, formalismul, oarecum, și intuiționismul),

cât de abordările fundaționale ce emerg din paradigmele conceptual-metodologice edificate din interiorul marilor teorii – teoria mulțimilor, teoria structurilor, teoria categoriilor – nu a invalidat rolul filosofiei în ansamblul investigațiilor fundaționale; şi aceasta, deoarece elucidarea *naturii matematicii* rămâne de competența ei, iar tehnicile fundaționale, inspirate de logică, teoria modelelor, matematică etc., rămân cu rol de instrumente auxiliare în acest dificil, dar pasionant travaliu. Apar noi conexiuni între domeniile matematicii, dar şi între tipurile de cercetare fundațională pe fundalul unei confruntări între direcții tradiționale şi direcții recente cu caracter novator, ce par a o rupe radical cu perspectivele prea „ortodoxe" şi „oficializate" ce au încorsetat cercetările ca într-un aşa-zis pat „procustian" (ca de exemplu, schema „logicism-formalism-intuiționism"). Aceste perspective au fost tributare unor concepții filosofice, în ciuda unor declarații anti-metafizice făcute de unii reprezentanți şi i-am numit pe formalişti (în frunte cu şeful acestei şcoli, Hilbert, care a lansat provocator celebrul slogan; „să separăm odată pentru totdeauna fundamentele de filosofie şi să le mutăm în interiorul matematicii"), dar şi pe intuiționişti, care începând cu Brouwer au negat orice supoziție filosofică cu rol de fundare a matematicii.

Oricum, tentative privind dispensarea de filosofie s-au făcut, cum am arătat deja, chiar recent şi facem referire în acest sens la schema lui Henkin [1], al cărei nucleu este relevat de formularea titlului studiului consacrat acesteia; este vorba de *„fundamente matematice pentru matematică"*, în care, cum se observă, lipsesc din structura fundamentelor un gen de fundamente, ce s-au bucucat de atenția lui Kreisel [1], este vorba de *fundamente logice* (ale matematicii), o renunțare datorită poate caracterului lor prea „impur" grație „încărcăturilor" lor filosofice, despre care deja am vorbit. Expresia introdusă de noi *„relevanța filosofică"* sugerează că chiar dacă filosofia nu ar putea fi regăsită, ca o componentă distinctă în ansamblul cercetării fundaționale, rămâne măcar o indicație metaforică că ea ar fi prezentă, cel puțin difuz, în „masa" fundamentelor teoriilor matematice, a matematicii luate ca întreg; ar fi reabilitat cel puțin un sens mai slab şi, deci, mai vag al prezenței filosofiei în cuprinsul

matematicii, din care nu o poate izgoni nici chiar maturizarea conceptuală şi metodologică a acestei ştiinţei; şi în acest caz sever filosofia ar mai avea, încă, şansa de a se replia, regăsi, recupera, sub presiunea practicii matematice, este drept cu o structură exigentă ca în ipostaza de filosofie nu a matematicii ci de *filosofie matematică*, dacă noi interpretăm corect mesajele lui B. Russell [1] şi G. Kreisel [2].

1.3. CERCETAREA FUNDAŢIONALĂ, METAMATEMATICĂ ŞI FILOSOFIA GENERALĂ

Din ansamblul problemei prezentului studiu am examinat numai cercetarea fundaţională şi componentele ei de bază – fundamentele matematicii şi filosofia matematicii. Au rămas neelucidate alte două componente (metamatematica şi filosofia generală), conexiunile dintre ele şi relevanţa lor pentru ansamblul cercetării fundaţionale. Nu vom stărui mult asupra acestui subiect, limitându-ne la formularea câtorva aserţiuni apte să ne restituie unele aspecte esenţiale ale metamatematicii şi filosofiei generale în conexiunea lor relevantă pentru întregul cercetării fundaţionale a matematicii.

Gonseth [1] a distins trei dimensiuni sau nivele ale matematicii: intuitiv, formal şi metamatematic. Metamatematica este legată în destinul ei de numele lui D. Hilbert, în a cărui intenţie (marcată de distincţia matematică-metamatematică) era o „*teorie a demonstraţiei*" (Beweistheorie), un instrument ce i-a permis să-şi formuleze propria sa concepţie despre modul în care urmează şi trebuie să fie analizat raţionamentul matematic. Naşterea metamatematicii s-a produs după realizarea formalizării matematicii, materializată şi identificată istoric ca atare în „*Principia Mathematica*", descoperită de Hilbert ca o ilustrare relevantă a fenomenului (sau în limbajul lui Gonseth, a „orizontului") formal (= matematica formală, formalizată). Problema care se pune este: în ce relaţie stă metamatematica cu fundamentele matematicii? Le leagă negreşit un element şi anume au în comun *problema fundării* matematicii,

dar în acelaşi timp le separă mai multe aspecte, încât să considerăm că ele coincid. În primul rând metamatematica în sens modern (adică hilbertian) este, istoric vorbind, de dată mai recentă decât fundamentele matematicii şi anume se constituie prin opera matematicianului german citat, în secolul nostru între anii 1917–1939, primul an marchează apariţia lucrării lui Hilbert [1], ultimul an este cel al apariţiei lucrării mature elaborată cu unul din discipolii săi (Hilbert-Bernays) [2]. Şi, cum am mai spus, se constituie ulterior formalizării matematicii realizate de A. N. Whitehead şi B. Russell [1] în anii 1910–1913 cu alte cuvinte, fără raportare la orizontul formal, existenţa metamatematicii nu se poate legitima.

Cum observa S. C. Kleene [1] există conexiuni directe între *problema fundării matematicii* şi apariţia *metamatematicii*, deoarece această problemă urma să fie asigurată printr-o *demonstraţie finitist metamatematică a consistenţei matematicii clasice*, ceea ce în concepţia lui Hilbert se poate realiza prin următorii paşi procedurali: mai întîi, se proceda la redactarea matematicii (clasice) într-un sistem axiomatic formal, şi apoi se aplica direct definiţia consistenţei (în sens sintactic), adică teoria formalizată, sistemul formal nu trebuia să admită două teoreme contradictorii. Astăzi noi ştim că acest tip de demonstraţie, numită „*absolută*", (contra-distinctă de cea relativă, ce constă în „*traducerea*" în alt sistem, dar consistent) urma să apeleze exclusiv şi intern la mijloacele specifice sistemului formal în cauză. Să remarcăm profunda conexiune istorică dar şi de „mediu" relevant între conceptul de *sistem formal* şi *metamatematică* şi că ceea ce întemeietorul ei (Hilbert) avea în vedere când discuta despre demonstraţii, erau, de fapt, *derivări formale* sau *demonstraţii formale,* pe care le-a făcut obiect central al unui nou tip de investigaţie – *metamatematica.* Metamatematica hilbertiană, sau „teoria demonstraţiei", formula condiţii perceptuale (aici sesizăm o influenţă kantiană) de analiză, şi deci necesitatea apelului la mijloace finitiste în travaliul demonstraţiei consistenţei matematicii; exigenţa finitistă era necesară, observă şi Gonseth [1], procurării unor convingeri intuitive. Aşadar, dacă fundamentele matematicii se pierd în istoria

matematicii ele fiind practicate şi în legătură cu orizontul intuitiv (creativ) al matematicii (conform ierarhiei semnalate de Gonseth), ilustrare stau euclidianismul, cantorianismul etc., în sens strict despre metamatematică vorbim în secolul nostru (al XX-lea), odată cu cercetările întreprinse de D. Hilbert. G. Kreisel observa că metamatematica hilbertiană a fost prea restrictivă, deoarece punerea ei de acord cu progresul cunoaşterii învederează că semnificaţia ei este astăzi diferită; o teorie a demonstraţiei adecvată ar trebui, şi în fapt se face astăzi, să investigheze demonstraţiile formale în legătură cu demonstraţiile intuitive; ori, pentru „*Beweistheorie*" a lui Hilbert, *demonstraţia* însemna numai demonstraţie *formală*, un punct de vedere abandonat de cercetătorii contemporani ca Prawitz [1], [2], Kreisel [1], [3] şi alţii.

Dar, dacă examinăm structura intrinsecă a *fundamentelor matematicii* şi cea a *metamatematicii*, mai putem, identifica asemănări, analogii, diferenţe, intersecţii etc.? Am consemnat că *problema fundării* este comună în câmpul lor de investigaţie, cu specificarea că metamatematica o analizează numai în legătură cu, şi pe „corpul" sistemelor formale ale matematicii, sau, mai exact, ale diferitelor teorii matematice, şi, în consecinţă, ca „produs modern", această disciplină a gândirii matematice beneficiază şi apelează la achiziţiile, instrumentele cunoaşterii moderne - logica matematică, logica algebrică, semantică, sintaxa logică, teorii recente din matematică; iar de aici caracterul pronunţat „tehnic" al metodologiei pe care o întrebuinţează. Aceste observaţii ne introduc o trăsătură specifică metamatematicii: este o cercetare metateoretică care abundă în metode, şi, de aici, caracterul ei „*metodologic*". *Fundamentele matematicii* nu au un asemenea caracter *reductiv*, unilateralităţii metodologice a metamatematicii îi opun o perspectivă complexă şi complementară, în care, desigur, se regăseşte şi dimensiunea *metodologică*, dar alături de cea *ontologică*, ca în cazul justificării axiomelor, ipotezelor, postulatelor (a infinitului, continuului etc.), sau *epistemologică* ce vizează natura conceptelor, mai cu seamă cu privire la izvorul cunoaşterii lor, adesea la punctul de contact cu filosofia matematicii, fundamentelor matematicii fiindu-le inerente chiar

o „axiologie" epistemologică. Şi oricum, din perspectiva unor fundamente mai „clasice" ale matematicii, se poate reproşa metamatematicii moderne că prin „cantonarea" prea severă în paradigma aplicării exclusiviste a metodelor *formale* de cercetare, lasă o serie de probleme fundaţionale fără un răspuns satisfăcător, o obiecţie ce vine din perspectiva unor *fundamente intuiţioniste* ale acestei ştiinţe. Cantonată prea strict metodologic, problemele ontologice ale matematicii primesc doar parţial şi unilateral răspuns dintr-o perspectivă, ce ţine prea exclusiv de abordarea *internă,* neglijând-o sau chiar ignorând-o pe cea *externă.* Dacă este nejustificată orice respingere radicală a metodelor şi rezultatelor cercetărilor formale a fundamentelor, nu este mai puţin adevărat, arată Beth [1], că abordarea din interior a problemelor fundaţionale, centrată, am spune, pe analiza *structurii deductive* a teoriilor matematice, nu poate conduce decât la concluzii de natură metodologică şi nu ontologică, ceea ce diminuează relevanţa (filosofică, dar nu numai) perspectivei de investigaţie metamatematică. În context, subliniem un slab racord al metamatematicii la filosofia matematicii, parcă în acord cu dezideratul hilbertian al separării fundamentelor de filosofie, deoarece fineţea analizei matematice, strict internă, sacrifică o bogăţie de semnificaţii filosofice subiacente acestor probleme ontologice – specifice filosofiei matematicii – inclusiv semnificaţii ce se constituie din relaţiile matematicii cu alte domenii ale gândirii şi experienţe umane.

Şi. totuşi, mult râvnita *„separare hilbertiană"* a *fundamentelor* de *filosofie*, prin intermediul metamatematicii, se pare că nu s-a putut împlini. Sub influenţa lui Kreisel [1], dar şi a altor autori, consemnam într-un studiu [3, p. 47] următoarele: „Prin epistemologie se înţeleg aici concepţiile aparţinând lui P, adică principii neformale de demonstraţie care asigură validitatea logică intuitivă. Principiile intuitive ale demonstraţiei prezidează construcţia sistemelor formale, dar elementele de natură psihologică prezente în aceste principii nu permit o analiză exactă, astfel că trebuie să fie înlocuite cu reguli formale. Dar această concluzie antifilosofică nu determină o renunţare integrală la tipul de cunoaştere implicat în principiile intuitive; după cum se ştie, s-ar putea

invoca drept argument teorema lui Gödel de incompletitudine, ca şi rezultatul lui Gentzen, care reabilitează cunoaşterea neformală, făcând nerealizabil idealul aristotelic al cunoaşterii deductive; relevant în această privinţă este conceptul de sistem semiformal introdus de Schütte [1]"; este o recuperare evidentă a vocaţiei fundaţionale a filosofiei.

Dacă aceasta este relaţia dinspre filosofie spre metamatematică, să vedem ce se poate spune despre săgeata inversă a acestei relaţii. În primul rând, trebuie notat că cercetarea modernă din sfera fundamentelor matematicii include, ca o parte, metamatematica, faţă de care acestea sunt evident supraextensive prin: a) ansamblul problemelor fundaţionale este mai vast decât problematica metamatematicii, cum uşor se observă din lectura listelor de clase ale problemelor fundaţionale alcătuite de A. Mostowski [1] şi A. Robinson [1]; şi, oricum, aşa cum am subliniat slăbiciunea cea mai importantă a metamatematicii rezidă în ignorarea problemelor ontologice, ceea ce îi diminuează contribuţia în cadrul cercetării fundaţionale: b) sărăcia de perspective în abordarea exclusiv metodologică, iar în acest plan folosirea unui cadru strict intern sintactic ce este definitoriu pentru metamatematică; aşadar, fundamente „sintactice" numai. Dar în viziunea dinamicii, progresului activităţii din domeniul cercetării fundaţionale a matematicii, metamatematica este recuperată ca o achiziţie utilă şi eficace în anumite contexte în sfera fundamentelor matematicii. Această cercetare de la nivelul fundamentelor matematicii a avut uneori un efect „distructiv", în sensul că a „răsturnat" doctrine importante din filosofia tradiţională, şi aşa cum vom vedea chiar teoria aristotelică a ştiinţei în confruntarea cu evoluţiile ştiinţelor a suferit infirmări semnificative. Beth [1] notează că situaţii conceptuale şi metodologice remarcabile au generat controverse dure între reprezentanţii cercetării moderne din fundamentele matematicii (în care am inclus şi metamatematica) şi adepţii filosofiei generale, sau speculative, cum o mai numesc unii autori. Învăţămintele ce le degajă aceste controverse, discuţii, dezbateri nu trebuie să le receptăm negativist şi nihilist vis-à-vis de tradiţia filosofică, ci, mai curând, să folosim concepţiile impuse de investigaţiile moderne ca instrumente şi scenarii actuale de

lectură şi reinterpretare în vederea unei mai corecte pătrunderi a semnificațiilor şi mesajelor filosofiei antice şi medievale, dar şi moderne. Să notăm în încheierea acestui paragraf că dacă facem apel la distincția „*fundaționist-fundațional*", explicitată în analizele produse anterior, atunci relația acestor „perspective-stiluri" cu filosofia apare din unghiuri diferite, cu caractere diferite, căci în inserția cu programele fundaționiste *filosofia tradițională* se manifestă influent şi pozitiv, mai cu seamă în legătură cu problema *naturii entităților matematice,* deoarece ce sunt logicismul, formulismul şi intuiționismul decât „specializări" ale marilor curente filosofice: platonismul, nominalismul şi conceptualismul?; ori, în relația cu studiile fundaționale metamatematice constatăm o stare de „*recul*" a filosofiei tradiționale sub impactul acestora, fie o infirmare, fie o reinterpretare, regândire a ei şi, poate, revigorare, chiar potențare a ei.

CAPITOLUL II

ISTORIA ŞI FILOSOFIA ANTICĂ A MATEMATICII: PROFIL TEMATIC, METODOLOGIC ŞI EPISTEMOLOGIC AL MATEMATICII GRECEŞTI

2.1. CADRUL GENERAL AL MATEMATICII GRECEŞTI ANTICE

Este un fapt remarcabil că matematicienii greci, chiar de la începuturile cercetărilor lor, şi avem în vedere Ionia din Milet, preluând materialul matematic acumulat în vechiul Orient, Egipt şi Babilon, l-au asimilat şi transformat original, apropiindu-se de idealul formulării riguroase a propoziţiilor matematice şi a demonstraţiei acestora. Nu este sigur că babilonienii ar fi ajuns la formularea propoziţiilor originale, excepţie în Orientul Antic face *geometria* sacră a vechilor hinduşi cu formulările în forma tradiţională a enunţului scurt dogmatic (sūtra); iar în privinţa demonstraţiilor, documentele n-au păstrat ceva relevant, cu excepţia unor verificări de calcule numerice, ceea ce nu acoperă semnificaţia «*probelor demonstrative*». Grecii au meritul incontestabil de a fi inaugurat tradiţia matematică a demonstraţiilor, al cărei început istoric este marcat de *Şcoala lui Thales*, dar o conştientizare ştiinţifică a ideii de *demonstraţie* trebuie atribuită şi vechilor pitagorei. „Fără îndoială că aici se află chiar începuturile ştiinţei exacte, concomitent cu ale

filosofiei şi, în consecinţă, acuma are loc pentru Europa, ceea ce se numeşte «*descoperirea spiritului*» (O. Becker [1, p. 42]). Cu grecii vechi matematica intra în faza „*construcţiei deductive*" edificată cu concepte prime şi principii fundamentale. Contribuţii semnificative au sofistul Hipocrat din Chios, primul autor de „*Elemente*", care a trăit cu o generaţie înaintea lui Platon, dar mai cu seamă Euclid (cu „Elementele" sale), Eudemos din Rodos, elev al lui Aristotel, care a scris prima istorie a geometriei şi astronomiei, şi alţii, între care trebuie să menţionăm reflecţiile filosofilor (Pitagora, Platon, Aristotel) în sfera fundamentelor matematicii şi a filosofiei matematicii. Grecilor antici trebuie să li se recunoască meritul de a fi întemeiat matematica ca ştiinţă, căci ei au analizat rodnic concepte ca cele de *infinit* şi *continuu* (investigaţii datorate şcolii eleate, lui Platon şi lui Aristotel); şi tot lor istoria matematicii le atribuie descoperirea «*iraţionalelor*».

Evocarea detaliilor istorice, relevante pentru ansamblul consideraţiilor ce le-am expus, trebuie să înceapă cu Thales. Tradiţia îi atribuie demonstraţia unor propoziţii ca: 1. Un cerc este împărţit în două părţi egale de oricare diametru al său; 2. Unghiurile opuse la vârf sunt egale; 3. Unghiurile de la baza triunghiului isoscel sunt egale; 4. Diagonalele unui dreptunghi sunt egale şi se taie în părţi egale, sau: Unghiul înscris într-un semicerc este drept. Propoziţiile enunţate sunt deduse dintr-o figură formată dintr-un dreptunghi cu diagonale, căruia îi este circumscris un cerc, figură asimetrică faţă de două axe perpendiculare.

Dar, probabil, tot la începutul secolului al VI-lea î.e.n. este localizată temporal *aritmetica pietricelelor*, care a instituit un mod de gândire matematic *sui-generis*, jumătate aritmetic, jumătate geometric; după Aristotel [2, N5], aceasta a condus la numerele figurative ale pitagoreilor (numere triunghiulare, numere pătratice, numere oblonge). Succint, se poate rezuma esenţa acestui mod de gândire astfel: folosind pietricele de aceeaşi mărime şi formă (rotunde, pătratice) se pot construi diferite figuri. Aristotel în lucrarea citată spune că pitagoreicul Eurytos determina numărul fiecărui obiect şi imita forma fiinţelor cu ajutorul

pietricelelor „în felul în care unii aşează numerele în forma de triunghi sau pătrat", ceea ce în mod cert trimite la numerele figurative, ale pitagoreicilor, deşi tradiţia a reţinut ca mai verosimilă definirea unităţii ca un punct fără poziţie şi, respectiv, definirea unui punct ca unitatea care are o poziţie.

Alt eveniment al matematicii greceşti este teoria despre *par* şi *impar*. Epiharm (500 î.e.n.), autor de comedii, foloseşte prima dată noţiunile de par şi impar şi în lucrările lui, de asemenea, se fac aluzii la reprezentarea numerelor prin pietricele. Dar, în plan teoretic, opoziţia dintre par şi impar descinde din fecunda distincţie pitagoriciană *infinit* şi *limitant (finit)*. Teoria sau învăţătura despre par şi impar a fost transmisă prin intermediul „*Elementelor*" lui Euclid, (inclusă la sfârşitul cărţii a noua), chiar dacă expunerea sistematică pe care marele geometru grec a dat-o aritmeticii nu o asuma ca imanentă. Teoria în cauză reprezintă, după aprecieri avizate, a se vedea Becker [1, p. 59], „cel mai vechi exemplu de «*mathema*» grecească, fragment didactic de deducţie, foarte interesant chiar şi din acest motiv".

Citǎm câteva fragmente referitoare la această teorie din autorii anterior menţionaţi (*apud* O. Becker [1], *Epiharm* (frag. B. Diels [1]): „Dacă cineva vrea să adauge o piatră la un număr impar sau chiăr la unul par, sau să ia o piatră dintre cele care există, crezi oare că numărul o să mai rămână la fel?". *Philolaos* (fragm. B5, Diels [1']: „Numărul are într-adevăr două forme deosebite, par, impar şi o a treia, născută din amestecul celor două, par-impar. Fiecare dintre cele două forme are însă multe înfăţişări pe care orice lucru le arată de la sine însuşi". Aristotel [3, III.4.203.a. 1045] cu referire la relaţia dintre cuplurile de concepte opuse finit-infinit şi par-impar scrie: „Pitagoreicii admiteau că infinitul este identic cu parul. Căci, el ar oferi lucrurilor infinitul, fiind în el însuşi desprins şi limitat de impar. Aceasta s-ar dovedi prin ceea ce se întâmplă cu numerele. Dacă gnomonii sunt aşezaţi împrejur, mai întâi în jurul unităţii şi apoi astfel încât unitatea să fie exclusă, atunci figura care apare este într-un caz (al doilea) totdeauna, diferită, în celălalt caz (în primul) este însă totdeauna aceeaşi". Explicaţia dată de un pitagorician

acestui text aristotelic dificil a fost formulată cum urmează: „Dacă în jurul unității se așează, ca gnomoni, numerele impare succesive, numărul care rezultă este pătratic; dacă din contră, numerele pare se așează împrejur tot ca gnomoni, rezultă simple numere oblonge şi de forme neegale; nici unul dintre ele nu este însă un număr înmulțit cu el însuşi". Un comentariu sintetic reține particularitatea că producerea pătratelor este asigurată ca sumă de numere impare, pe când producerea numerelor de forma „n(n+1)" are loc ca sumă de numere pare; pătratele sunt asemenea între ele, dreptunghiurile nu. Demonstrația imposibilității de a exprima în numere întregi raportul dintre rădăcina pătrată a lui 2 şi unitate era cunoscută pitagoreilor aproximativ la mijlocul secolului al V-lea î.e.n.

Între problemele matematicii eline cu efecte în planul matematicii, dar şi în plan filosofic, figurează în mod specific: *problema cvadraturii cercului, conceptele de infinitate şi continuitate, paradoxele lui Zenon, teoria proporțiilor* şi *fundamentarea axiomatică* a matematicii greceşti.

Problema cvadraturii cercului. Deşi Eudoxos este cel care formulează, probabil, primul cele două axiome ale măsurii - măsura „*multiplicativă*" şi cea „*divizivă*", Antifon este cel care în secolul al V-lea le-a aplicat la problema cvadraturii cercului. Datorăm lui Simplicius informații referitoare la această problemă: „Antifon a construit însă un cerc şi a înscris un poligon înăuntrul cercului, unul din acele poligoane inscriptibile. Fie poligonul înscris, de pildă, un pătrat. Găsind apoi mijlocul fiecărei laturi a pătratului, el a dus drepte perpendiculare din aceste puncte până la arcul cercului care, evident, au împărțit, respectiv, fiecare segment de cerc în două părți egale. Unind prin drepte punctele de diviziune ale arcelor de cerc cu vârfurile pătratului, au apărut patru triunghiuri, astfel că întreaga figură înscrisă în cerc a devenit octogon. Împărțind prin acelaşi procedeu în două părți egale fiecare latură a octogonului, ducând perpendiculare din punctele de diviziune ale laturilor până la circumferință şi unind punctele de diviziune ale arcelor cu extremitățile segmentelor împărțite, el a transformat poligonul înscris într-un poligon cu 16 laturi. Împărțind iarăşi laturile acestui poligon în

acelaşi raport şi unind punctele de diviziune ale arcelor respective cu vârfurile alăturate ale poligonului înscris, dublând numărul laturilor poligonului înscris şi repetând mereu procedeul, el credea că, în sfârşit, la un moment dat, după epuizarea suprafeței, se va înscrie în felul acesta în cerc un poligon, ale cărui laturi din cauza micimii lor s-ar suprapune cu circumferința. Întrucât, însă, putem construi pentru fiecare poligon un pătrat egal, după cum am învățat din „*Elemente*" şi pentru că poligonul trebuie considerat egal cu cercul, cu care se suprapune, vom fi în stare astfel să construim pentru un cerc un pătrat egal" (apud. O. Becker [1, p. 64, 65]. Şi Alexandru din Afrodisia subliniază argumentația pitagoricianului Bryson, care afirma că nu numai poligoanele înscrise, aşa cum a considerat Antifon, ci şi cele circumscrise pot fi luate în considerare cu privire la această problemă: „Cercul este mai mare decât orice poligon înscris în el şi este mai mic decât orice poligon circumscris lui... Dar şi figura rectilinie situată între o anumită figură rectilinie înscrisă şi o anumită figură rectilinie circumscrisă este mai mică decât cea circumscrisă şi mai mare decât cea înscrisă. Însă, ceea ce este în acelaşi timp mai mare, respectiv mai mic decât acelaşi lucru, este egal cu acel lucru; cercul este aşadar egal cu poligonul situat între poligonul înscris şi cel circumscris. Noi însă avem posibilitatea de a construi pentru orice figură rectilinie dată un pătrat cu aceeaşi arie; aşadar, este posibil să construim un pătrat de aceeaşi arie cu cercul" (apud O Becker [1, p. 66, 67]). Dar, o formulare mai concisă a dat Proclos, care spunea că „Bryson a efectuat cvadratura cercului în felul următor: cercul, spune Bryson, este mai mare decât orice poligon înscris, şi mai mic decât orice poligon circumscris. Când însă în comparație cu ceva există «mai mre» şi «mai mic» față de acel ceva, există şi «*egal*». Dar, poligoane mai mari şi mai mici decât cercul există, aşadar există şi un poligon egal cu cercul" (O. Becker [1, p. 67, 68]). Platon [1] spune textual: „Celui ce are proprietatea de a fi mare şi mic i se poate atribui şi proprietatea de a fi egal, care este situată între ele". Este o enunțare a unui principiu al *continuității*, care anticipează o celebră *axiomă a continuității*, pe care matematica o datorează lui Dedekind. Aristotel a fost interesat, în primul rând, de limitele aplicabilității acestui principiu de continuitate, căci

după ce în „*Metafizica*" susține că „egalul este situat între mare şi mic; este opoziția privativă față de amândouă...", afirmă că „este evident că tot ce este intermediar aparține aceluiaşi gen, se află între contrarii şi se compune din ele", ceea ce *revine* la a spune că valabilitatea principiului în cauză depinde de faptul că trecerea de la mai mare la mai mic nu ne scoate din cadrul aceleiaşi spețe. Cercetările lui Antifon şi Bryson au servit lui Eudoxos în elaborarea „*demonstrațiilor prin exhaustiune*". Acesta întrebuințând forma divizivă a *axiomei măsurii* („*Elemente*", X, 1) care apare aici ca teoremă derivată din forma „multiplicativă", prezentă în Cartea a V-a, def. 4, va fundamenta teoria măsurării ariilor mărginite de o linie curbă şi a corpurilor mărginite de suprafețe curbe.

Problema cvadraturii cercului şi considerațiile asupra integrării angajează *conceptul de infinit*, fundamental, cum se ştie, pentru matematica superioară. Aristotel, în secolul al IV-lea, este cel care a făcut o analiză profundă a acestui concept, soluția dată de el problemei infinitului şi anume exprimată în teza „infinitatea există numai în potențialitate, niciodată nu există în act" este de o remarcabilă rezonanță şi actualitate în filosofia contemporană a matematicii. Dăm în continuare câteva citate mai semnificative pentru concepția aristotelică în problema *infinitului*. În Aristotel [3] (*apud* O. Becker) este formulată mai întâi o justificare a legitimității conceptului de infinit: „Că există ceva infinit, aceasta rezultă din examinarea cel mult a cinci fapte: mai întâi, din timp, căci este infinit; al doilea, din diviziunea mărimilor, căci înşişi matematicienii folosesc infinitul; al treilea, deoarece devenirea şi dispariția nu încetează niciodată din cauză că sursa din care provine, ceea ce este în devenire este infinită; al patrulea, deoarece lucrul limitat are o limită numai în raport cu ceva, de unde rezultă, în mod necesar, că nu există limită propriu-zisă, dacă un lucru trebuie neapărat să fie totdeauna limitat de altul; al cincilea, este însă faptul care în cea mai mare măsură şi în sensul cel mai decisiv provoacă tuturor o dificultate comună: anume din cauză că în gândire nu există sfârşit, şi numărul şi mărimile matematice şi ceea ce este dincolo de bolta cerului par să fie infinite; dacă şi aceasta din urmă este infinită, atunci se pare că există şi un corp infinit, precum şi o pluralitate de lumi... Cercetările în legătură

cu infinitul prezintă însă dificultăți, deoarece rezultă multe lucruri imposibile, fie spunând că există infinitul, fie susținând că nu există". Presupunerea că înfinitul nu există absolut deloc angajează, după Aristotel, consecințe indezirabile, imposibile, precum: ar exista şi pentru timp un început şi un sfârşit, mărimile n-ar fi divizibile şi nici numărul n-ar fi infinit. Admisă fiind supoziția că infinitul există, se pune problema genului său de existență (în act sau ca potențialitate) şi deoarece a arătat că mărimea nu este infinită în act, dar este infinită prin diviziune, Aristotel conchide: „*infinitul există în potențialitate*". Aristotel conştientizează dificultățile problemei infinitului, analizează semnificațiile sau „speciile" infinitului, examinează atent argumentele pro şi contra ideii de infinit şi reflectează asupra aporiilor formulate de Zenon din Eleea (care foloseau noțiunea de *infinit „în act"*) şi, coroborând aceste aspecte, enunță o soluție „*constructivă*" în mult disputata problemă a infinitului. Aristotel notează în „*Fizica* III, 6, 206 a, 206 b: „Infinitul există atunci când un lucru poate fi pus după altul fără sfârşit, fiecare lucru pus fiind finit...", „infinitul este în potențialitate; ...nu trebuie să considerăm infinitul ca un lucru concret, cum este omul sau casa, ci aşa cum se înțelege ziua şi lupta, pentru care existența nu este o substanță determinată, ci este totdeauna în generare şi în distrugere, chiar dacă este limitată, dar este mereu în altul şi altul".

Desigur, concepția aristotelică este cea mai profundă şi adecvată, regăsită astăzi în matematică şi filosofia intuiționistă, dar constituirea ideii matematice şi filosofice de infinit are ascendente pre-aristotelice. Dintre acestea pot fi menționate speculațiile pitagoreilor asupra *limitei* (*peras*), principiu ce introduce structura în „cel fără limită, sau infinitul". Platon va accentua o interpretare cosmologică a distincției „*peras-apeiron*", structura lumii, fiind generată de cauza cosmică prin amestecul limitei (finitului) cu nelimitatul, infinitul; materia preexistentă (haosul, apeironul) primea o structură (ordine) inteligibilă ca efect al limitei active. Ordinea rațională a lumii reclamată de gândirea grecilor vechi era incompatibilă cu o existență fără limite, fără măsură, o asemenea existență, de neconceput, echivala cu ceva inexistent.

Analiza *conceptului de continuitate* (analiza „*continuului*") constituie o a doua mare contribuție a lui Aristotel în spațiul matematicii greceşti. O formulare categorică, ca şi în cazul problemei infinitului: continuitatea există numai în *potențialitate*, ambele (infinitatea şi continuitatea) rămânând totdeauna neterminate. Împărtăşite de majoritatea matematicienilor, concepțiile aristotelice despre conceptele în chestiune vor fi atacate de Georg Cantor în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, prin a lui teorie a mulțimilor, în care sunt considerate *multiplicități infinite în act*.

Aristotel [3] clarifică natura şi aplicabilitatea, (şi le defineşte), conceptelor de „*concomitent*" „*separat*", „*în contact*", „*intermediar*", „*consecutiv*", „*contiguu*" şi „*continuu*". („*Concomitent*" spunem despre lucruri aflate într-un loc; „*separat*" spunem despre lucruri aflate în locuri diferite; „*în contact*" spunem despre lucruri ale căror capete extreme sunt împreună; „intermediar" este ceva la care ajunge firesc lucrul care se mişcă înainte de a ajunge la extrema spre care tinde, ceea ce se schimbă continuu, „*consecutiv*" spunem despre lucrul care este îndată după început, fie prin poziție, fie prin formă, dacă nu există ceva de aceeaşi specie între acesta şi acela care urmează; iar „*contiguu*" este acel lucru care fiind consecutiv altuia este şi în contact cu antecedentul). „*Continuul*" scrie Aristotel [3] (*apud* O. Becker [1, p. 92]) „este desigur ceva care este contiguu, dar eu folosesc termenul „*continuu*" atunci când extremitățile fiecăruia din cele două lucruri, prin care ele vin în contact, devin unul şi acelaşi lucru şi – după cum spune chiar cuvântul „continuum" – ele se țin împreună, ceea ce nu este însă posibil atâta vreme cât extremitățile sunt două. Aceasta fiind definiția, este evident că aşa-zisul continuu există în acele lucruri care prin legare pot deveni unul singur în mod natural; şi oricare ar fi calea prin care ceea ce le ține împreună există ca unitate, întregul va fi tot o unitate în acelaşi mod, fie că legătura se face cu ajutorul unui cui, prin lipire, prin ataşare sau prin creştere împreună. Este evident că după ordine vine întâi consecutivul; căci, tot ceea ce este în contact trebuie să fie cu necesitate consecutiv, nu însă orice consecutiv trebuie să fie cu necesitate în contact. (De aceea, şi

la lucrurile care noțional sunt anterioare, ca de pildă la numere, există mai degrabă consecutivul decât contactul). Şi dacă un lucru este continuu, atunci trebuie să existe contact; dimpotrivă, dacă există contact, aceasta nu este suficient pentru a garanta continuitatea. Căci extremitățile, deşi pot fi împreună din punctul de vedere al locului, nu sunt cu necesitate un singur lucru; dar, dacă sunt un singur lucru, ele trebuie în mod necesar să fie împreună. În consecință, creşterea împreună se produce ulterior, căci extremitățile trebuie mai întâi să fie în contact dacă urmează să crească împreună, dar nu tot ce este în contact creşte împreună, în timp ce lucrurile care nu sunt în contact evident că nici nu cresc împreună. În consecință, chiar dacă punctul şi unitatea au, cum se spune, existențe separate, totuşi nu este posibil ca punctul şi unitatea să fie acelaşi lucru, căci punctele au contact, unitățile au însă numai succesiune, şi la primele poate exista intermediar, căci orice linie este între doi şi unitatea nu este nimic. S-a spus, deci, ce este «concomitent» şi «separat» şi ce este «în contact», «intermediar», «consecutiv», «contiguu» şi «continuu» şi căror lucruri li se atribuie fiecare din acestea".

Aşadar, dacă reținem ca fundamentale în problemă numai conceptele *continuu, contactul* şi *consecutivul*, atunci ele pot fi definite astfel: „continue sunt lucrurile ale căror extremități sunt una, în contact sunt lucrurile ale căror extremități sunt concomitente şi consecutive sunt acelea între care nu există nimic la fel cu ele". În continuare, Aristotel „focalizează" analiza sa asupra continuului, invocând în sprijinul acesteia şi unele exemple. Aserțiuni care explicitează analiza aristotelică a continuului: imposibilitatea ca indivizibilele să constituie un continuu, de exemplu, linia care este ceva continuu nu poate fi alcătuită din puncte, care sunt indivizibile; extremitățile punctelor nu sunt nici una şi nici nu sunt împreună, în primul caz, deoarece la indivizibile (şi punctele sunt aşa ceva) nu exista extremitate distinctă de restul lucrului indivizibil, în al doilea caz, indivizibilele fiind ceva fără părți, nu au părți extreme, extremitatea trebuind să fie distinctă de lucrul căreia îi aparține. Punctele care ar alcătui *continuul* ar trebui să fie sau continue sau în contact. S-a arătat până acum că nu pot fi continue, urmează să arătăm acum că nu

pot fi în contact. Contactul are loc între întreg şi întreg sau între parte şi parte, sau între o parte şi un întreg, oricum indivizibilul nu posedă părți, întregul poate fi în contact cu alt întreg; „dacă, însă, un întreg este în contact cu alt întreg, atunci nu se constituie un continuu, căci continuul conține părți diferite între ele şi este divizat în părți separate în acest sens şi separate ca loc". Punctul, ca şi clipa, nu pot fi consecutive altora, astfel încât să alcătuiască o lungime sau un timp, deoarece nu satisfac cerința ca între ele să nu existe intermediar; în realitate, între puncte există o linie, iar între clipe este întotdeauna un timp. Dacă admitem că o linie şi un timp (durata) pot fi divizate în părțile lor componente, apoi fiecare dintre acestea două ar fi împărțite în indivizibile. Dar, deja am constatat că continuuul nu este divizibil în părți fără componente (= indivizibile), iar punctele şi clipele nu pot avea între ele ceva diferit de ele; în cazul în care ar exista un intermediar, sunt două posibilități ca să fie sau ceva indivizibil, sau ceva divizibil, iar în cazul al doilea, ar trebuie să fie împărțit fie în indivizibile, fie în divizibile la *infinit* (s.n. în text). Aristotel conchide că tocmai acest din urmă caz este *continuul:* „Este evident că orice continuu este divizibil la infinit; dacă ar fi divizibil în indivizibile, atunci un indivizibil ar fi în contact cu un indivizibil, căci extremitățile continuului sunt una şi sunt în contact" (Aristotel [3]). Stagiritul dezvoltă similar un raționament pentru mărime, timp şi mişcare, a cărui concluzie ar fi, credem, ideea următoare: „În acelaşi mod ca la lungimi şi mişcări, există necesitatea ca şi timpul să fie indivizibil sau să fie compus din clipe indivizibile; căci, dacă fiecare distanță este divizibilă şi dacă un lucru mişcându-se cu aceeaşi viteză străbate o distanță mai mică într-un timp mai mic, atunci şi timpul va fi divizibil şi invers, dacă timpul în care un lucru se mişcă pe distanța A este divizibil, atunci şi A va fi divizibilă". Corelând aspectele mişcare şi timp (întrucât mişcarea se produce în timp, după cum şi în orice timp este posibil ca ceva să se mişte), Aristotel afirma că dacă „tot ce este în mişcare poate să se mişte şi mai repede şi mai încet, atunci mişcarea se va face în orice timp, mai repede şi mai încet". Concluzia aristotelică este directă: „dacă lucrurile stau astfel, atunci trebuie să admitem că şi timpul trebuie să fie continuu".

„Prin continuu eu înțeleg ceva ce este totdeauna divizibil în divizibile la *infinit* (conexiune relevantă infinitate-continuitate, s.n. M. Ț.) şi dacă punem la bază acest continuu, atunci este necesar ca şi timpul să fie continuu" (Aristotel [3] cf. Becker [1, p. 96]).

Ajunşi în acest punct al analizei făcute de Aristotel, avem deja conturată o perspectivă care conduce la o altă problemă semnificativă în tabloul matematicii eline, cea a *paradoxelor*, şi în care filosoful grec s-a distins prin contribuții importante înregistrate în istoria matematicii şi filosofie. Problema *paradoxelor*, clasică în vremea în care a trăit Aristotel, este legată de opera lui Zenon din Eleea care, vrând să apere concepția dascălului său, Parmenide, despre unitatea întregii existențe, a procedat la o examinare a conceptului de mişcare în vederea reducerii la absurd a acestuia.

Lui Henri Lebesque îi aparțin memorabilele cuvinte care invocă semnificația paradoxelor lui Zenon pentru colaborarea dintre oamenii de ştiință şi filosofi: „După primele mari progrese realizate de teoria mulțimilor, filosofii şi matematicienii au crezut că venise momentul să-şi întindă mâna peste larga prăpastie ce-i despărțea. Dialogul pe care l-au angajat părea să fie la început un fel de joc al cuvintelor întrerupte; se părea că, iată, încă câteva clipe, încă un mic efort şi unii îi vor înțelege pe ceilalți. Cineva l-a invocat însă pe Zenon din Eleea şi paradoxurile lui. Şi atunci, la apariția lui Zenon, matematicienii au înțeles că trebuiau să se retragă".

Argumentele lui Zenon se înscriu într-o polemică care are încă valoare actuală. Analiza aristotelică precedentă a continuității şi infinității îşi învederează reale valențe explicative în critica paradoxelor lui Zenon. P. Costabel [1, p. 112-118] sistematizează, după Aristotel [3], pe categorii, celebrele argumente ale lui Zenon: 1) „Nu poți ajunge până la capătul unui stadion, pentru că nu poți străbate într-un timp finit un număr infinit de puncte. Înainte de a străbate distanța întreagă eşti nevoit să străbați jumătate din ea, şi înainte de a parcurge prima jumătate trebuie să parcurgi jumătate din ea. Şi aşa mai departe, până la infinit. Şi fiindcă în orice spațiu dat există un număr infinit de puncte, nu poți străbate într-un

interval finit, unul după altul, un număr infinit de puncte; 2) Al doilea argument poate fi enunțat cum urmează: „Plecând în urmărirea unei broaşte țestoase, Ahile n-o va întrece niciodată. El trebuie să ajungă mai întâi la locul de unde a plecat broasca. Dar, în timpul acesta ea va continua să înainteze. Ahile va trebui să parcurgă şi această din urmă distanță, iar broasca va profita de timp ca să mai facă o bucățică de drum. Ahile se va apropia mereu de broască, dar n-o va ajunge niciodată".

Ambele argumente aparțin aceleiaşi categorii şi se referă la problema dacă o distanță poate fi străbătută fie printr-o mişcare absolută, fie printr-o mişcare relativă. Zenon speculează asupra ipotezei adversarului, după care orice deplasare se compune din elemente succesive şi distincte, avertizând că această ipoteză conduce la rezultate absurde. Aplicarea imprudentă a acestei ipoteze rezidă în aserțiunea, după care, distanța este divizibilă la infinit, adică este alcătuită dintr-un număr infinit de elemente, în timp ce, duratele corespunzătoare, observă P. Costabel [1], sunt concepute ca având o mărime măsurabilă. Aristotel a înțeles intenția raționamentului lui Zenon şi, în replică, acceptând-o, îi dă dreptate parțial, ca în final să indice propria sa opinie care face ca absurditatea la care conduce argumentul lui Zenon, să intre în „disoluție": „Fără îndoială, dacă ne referim la o cantitate infinită de elemente, nu este posibilă atingerea ei într-un timp finit, dar dacă ne referim la un număr infinit de divizări, atunci imposibilitatea dispare, căci în acest caz, şi timpul este infinit". Pe scurt, absurditatea, la care conduc argumentele lui Zenon, se datorează faptului că ipoteza compoziției dintr-un număr infinit de elemente este aplicată numai spațiului, dar nu şi timpului. Dacă ipoteza este aplicată atât spațiului, cât şi timpului, legate prin aceeaşi structură, aporia este evitată.

Expunem celelalte două argumente: 3) „Săgeata care zboară este în stare de repaos când ocupă un spațiu egal cu ea însăşi şi dacă ceea ce zboară ocupă totdeauna şi în orice moment un spațiu egal cu el însuşi, lucrul acela nu se poate mişca". Aristotel [3] demonstrează şi acest silogism al lui Zenon, care foloseşte asumpția că timpul este compus din părți indivizibile care nu mai permit să distingem între „instantaneu" şi „durata

elementară". Această concepție acreditează ideea că „fiecărui moment i-ar corespunde atât o poziție spațială a obiectului mobil, cât şi o „bucată din mişcare" (P. Costabel [1], p. 114). Aceste observații datorate autorului francez sunt consecințe ale textului aristotelic: „E consecința presupunerii că timpul este compus din momente. Dacă respingem această ipoteză, sofismul cade". 4) „Cel de-al patrulea argument, spune Aristotel, se referă la mase (puncte materiale indivizibile) care se mişcă pe stadion în şiruri egale, paralele şi de sens invers, unele plecând de la capetele stadionului, iar altele de la mijloc şi având toate o viteză egală. Pretinsa consecință ar fi aceea că jumătatea timpului este egală cu dublul ei". Argumentele 3) şi 4) au comun introducerea mişcării relative. Conform concepției pitagoricienilor, liniile sunt reprezentate aici prin şiruri de elemente, o reprezentare care în cazul argumentului 4) explicitează pentru spațiu ipoteza elementelor indivizibile, oferindu-ne o imagine a absurdității generate de ideea structurii corpusculare a spațiului. Comentariul lui P. Costabel explicitează consecințele unei asemenea asumpții care a funcționat ca o prejudecată: „Măsurarea timpului prin numărul unităților de spațiu străbătute (consecința directă a ipotezei unei compoziții discrete comune) conduce în acelaşi caz la concluzia absurdă că unu este egal cu doi, concluzie la care, de altfel, ducea în fond şi al treilea argument. «Grăuntele» de timp, considerat concomitent drept «moment» şi «durata elementară», ar urma să fie, în acelaşi timp, şi unu şi doi. Morala paradoxurilor lui Zenon este aceasta: mişcarea impune ca spațiul şi timpul să aibă aceeaşi structură şi anume, de *continuu* divizibil la *infinit*, conceptele subliniate având rol central acreditat de aceste antinomii.

Proporțiile (teoria proporțiilor) erau cunoscute încă din epoca preelenă a matematicii, fiind folosite în considerații despre triunghiuri asemenea. Babilonienii posedau chiar noțiunea de raport în general. (Cf. Iamblichos [1] (*apud.* O Becker [1, p. 101]), „proporția perfectă ar aparține babilonienilor şi ar fi ajuns la greci mai întâi prin *Pitagora.* Se mai ştie că mulți pitagoreici au făcut uz de ea, ca *Aristaios* din Crotona, *Timaios* din Locra, *Philolaos*, *Archytas* din Tarent şi mulți alții, apoi *Platon* în „Timaios".

Pitagoreicii cunoşteau în secolul al V-lea trei feluri de medii proporţionale şi proporţiile corespunzătoare, fapt atestat de unele fragmente ale lui Archytas: „Există trei medii proporţionale în muzică: mai întâi cea *aritmetică*, apoi cea *geometrică*, în al treilea rând, cea reciprocă care se numeşte *armonică*. Media aritmetică este cea în care între cei trei termeni numerici din proporţie există următoarea diferenţă: cu cât depăşeşte primul termen pe al doilea, cu atât depăşeşte al doilea pe al treilea. Şi la această proporţie se întâmplă că raportul termenilor numerici mai mari este mai mic, iar al celor mai mici este mai mare. Medie geometrică avem atunci când primul termen este faţă de al doilea, aşa cum al doilea termen este faţă de al treilea. Termenii mai mari sunt în acelaşi raport ca cei mai mici. Proporţie *reciprocă* (care se numeşte *armonică*) avem dacă termenii se compară astfel: cu a câta parte a mărimii proprii depăşeşte primul termen pe al doilea, cu aceeaşi parte din al treilea termen depăşeşte termenul mediu pe al treilea. La această proporţie, raportul termenilor mai mari este mai mare, raportul termenilor mai mici este mai mic". (Pasaje asemănătoare găsim în Platon [2], [3]. Metoda babilonică folosea aceste medii în aproximarea rădăcinii pătrate.

Luăm două numere – a, b – media lor geometrică este $\sqrt{ab}$. Vom avea $\sqrt{b}$ dacă a = 1; media aritmetică a acestor numere a, b este $\frac{1}{2}(a + b)$ şi este mai mare decât $\sqrt{ab}$, iar media lor armonică 2ab: (a+b) este mai mică decât $\sqrt{ab}$. Obţinem media armonică dacă pătratul mediei geometrice, adică ab se divide prin media aritmetică $\frac{1}{2}(a + b)$ procedeu folosit în aproximarea rădăcinii pătrate. „Căci media geometrică între a şi b şi media geometrică între media lor armonică şi aritmetică este acelaşi număr şi astfel prin repetarea continuă a procesului de inserare a celorlalte două medii se poate aproxima la infinit media geometrică, în particular rădăcina pătrată. Această inserare dă proporţia „muzicală" sau „perfectă:

$$a : \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b}{2} : b \text{ de ex. } 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2 \left[a = 1, b = 2\right]$$

(O. Becker [1, p. 100]).

Dar, dacă teoria proporţiilor geometrice a fost iniţial aplicată în mod naiv la orice, odată cu Euclid dispunem de o fundamentare riguroasă şi pentru numerele întregi. În „*Elementele*", Cartea a VII-a, Euclid formulează o definiţie (definiţia 20) fundamentală: „Numerele sunt proporţionale dacă primul număr este faţă de al doilea număr un multiplu de un număr egal de ori sau este aceeaşi parte sau aceeaşi mulţime de părţi, aşa cum al treilea număr este faţă de al patrulea".

Referiri la domeniul rapoartelor raţionale (în numere întregi) găsim în Platon şi Aristotel. Platon [4] descrie *limita* astfel: „Oare nu vom socoti noi pe bună dreptate ca ţinând de *limită* lucrul care nu e un suport pentru infinit, ci închide în sine, toate contrariile – mai întâi egalul şi egalitatea, după egal dublul şi tot ce se comportă ca număr faţă de număr sau măsură faţă de măsură?". Infinitul este descris de Platon în aceeaşi lucrare ca „mai mult sau mai puţin", ceva care nu admite ca un lucru particular să fie un „cât"; infinitul este în mişcare, câtul în repaos.

Aristotel [2] scrie: „Relativ" („faţă de ceva") se spune într-un sens că este ca jumătatea faţă de dublu şi triplul faţă de a treia parte şi, în genere, multiplul faţă de cutare parte, ca şi ceea ce depăşeşte faţă de depăşit... În acest prim sens, avem în vedere relaţia (raportul) după număr, fie în mod nedeterminat („doar aşa"), fie în mod determinat, în raport cu numărul sau cu unitatea. Astfel, raportul dintre dublu şi unitate (2:1) reprezintă un anumit număr, raportul dintre număr şi unitate (n:1) reprezintă un număr nedeterminat (cutare) (n). Raportul dintre unu şi jumătate şi două treimi din el $\left(\frac{3}{2} : 1\right)$ este un raport determinat între numere (3:2); raportul dintre $1 + \frac{1}{n}$ şi 1 este un raport numeric nedeterminat (n+1: n), întocmai ca raportul dintre multiplu şi unitate (n:

1). Relația dintre ceea ce depăşeşte şi ceea ce este depăşit este complet nedeterminată ca număr; căci numerele sunt între ele comensurabile, dar acel raport este incomensurabil ca număr. Ceea ce prisoseşte este tot atât cât şi lipseşte şi încă ceva mai mult; însă, acest ceva nu este determinat. Toate aceste relații sunt enunțate şi ca valori numerice şi ca proprietăți".

Textele platoniciene şi aristoteliciene dovedesc cu prisosință că referirile sunt făcute la rapoartele raționale, considerate determinate, numeric şi cantitativ. Descoperirea *incomensurabilității* laturii cu diagonala pătratului şi poligonului regulat va produce o «*criză fundațională*» în matematică, infirmând concepția pitagoreică conform căreia numărul face „*totul cognoscibil*", o credință afirmată în special de Philolaos. Informațiile pe care le expunem în continuare le datorăm comentariilor lui O. Becker [1, p. 103-110]).

Dificultățile indezirabile prilejuite de acest fenomen au fost manevrate prin două proceduri: prin prima s-a încercat evitarea în general a proporțiilor în considerațiile geometrice, prin înlocuirea lor prin egalități de arii, ştiut fiind că a:b = c:d este echivalentă cu ecuația produselor ad = bc; aceasta exprimă echivalența dreptunghiurilor cu laturile a, d, respectiv b, c. Demonstrația dată de Euclid teoremei lui Pitagora în „*Elemente*" I, 47 este o ilustrare elocventă a acestei proceduri. Cea de-a doua procedură a vizat elaborarea unei teorii a proporțiilor, valabilă pentru numere raționale, dar şi numere iraționale, teoria clasică aparținând lui Eudoxos în secolul al IV-lea î.e.n. Însă, încă în secolul al V-lea, o teorie în domeniu caracteriza egalitatea a două rapoarte prin aşa-numita *antanairesis* sau *anthyphairesis*, conform lucrării lui van der Waerden [1, p. 208, 288] şi N. Bourbaki [1, p. 110], pentru determinarea celei mai mari măsuri comune a două mărimi comensurabile se scade cea mai mică din cea mai mare, apoi se scade cea care a rămas mai mică din cea mai mare şi se continuă până rămân două mărimi egale care constituie măsura comună. Procedeul este cunoscut în teoria elementară a numerelor sub numele „*procedeul împărțirilor succesive*" sau „*algoritmul lui Euclid*" şi a fost enunțat pentru numere în Cartea

a VII-a (1, 2), iar pentru mărimi în Cartea a X-a (2, 3) din „*Elemente*" în vederea construcției celui mai mare divizor comun şi celei mai mari măsuri comune. Forma este a dezvoltării unui raport în fracție continuă cu numărătorii 1, iar raportul este rațional sau irațional, după cum această dezvoltare este finită sau infinită.

Înaintea formei aritmetice a procedeului din „*Elemente*" (VII, 1, 2), Theodoros din Cirene (≈ 430 î.e.n.) a demonstrat iraționalitatea rădăcinilor păstrate din 3, 5, 7, ..., 17 pentru fiecare caz în parte, lucru consemnat şi în Platon [5, 147 d], o demonstrație inutilă, dacă el ar fi cunoscut teoria numerelor din „*Elemente*". Forma clasică a teoriei generale a proporțiilor a dat-o Eudoxos, matematician contemporan cu Platon. Teoria antifairetică a proporțiilor („procedeul de împărțiri succesive") era valabilă universal numai cu privire la rapoarte de orice fel, raționale sau iraționale, dar cu privire la obiectele matematice (numere, drepte, suprafețe, corpuri, timpuri etc.) învedera o inaplicabilitate, căci cerea demonstrații separate pentru fiecare gen de asemenea entități. Eudoxos construieşte o teorie în care acest aspect nu mai are relevanță, căci se aplică la mărimi în genere, singura condiție satisfăcută fiind cea stipulată în axioma măsurii, ulterior numită şi „*axioma arhimedică a măsurii*". Contribuția lui Eudoxos este comentată de Aristotel [1, p. 7] cum urmează: „Mai înainte se obişnuia să se demonstreze permutabilitatea mezilor unei proporții separat pentru numere, drepte, solide, intervale de timp, deşi acest lucru se poate dovedi printr-o singură demonstrație pentru toate. Însă, pentru că toate acestea, adică numere, lungimi, intervale de timp şi solide nu aveau o denumire unitară, iar după forma lor specifică se deosebesc unele de altele, ele au fost tratate fiecare separat. Acum, însă, demonstrația este efectuată în general; căci ele nu posedă acea proprietate ca lungimea sau numere, ci întrucât ele posedă o determinare pe care noi o considerăm ca universală".

Heath [1] expune teoria lui Eudoxos; noi reținem aici numai primele trei definiții şi menționăm că sunt enunțate şi demonstrate 22 propoziții. Prima definiție având semnificația axiomei arhimedice a măsurii spune: „două mărimi au un raport între ele, dacă înmulțite una

poate întrece în mărime pe cealaltă"; a doua definiție afirmă: „mărimile se află în același raport, prima față de a doua și a treia față de-a patra, dacă multiplii egali ai primei și ai celei de-a treia în același timp sau întrec în mărime, respectiv multiplii egali ai celei de-a doua și a celei de-a patra, pentru orice multiplu, sau sunt egali sau mai mici, luați în ordinea corespunzătoare"; iar a treia definiție: „Dacă între multiplii egali (menționați în definiția anterioară) multiplul primei mărimi întrece în mărime multiplul celei de-a doua și dacă multiplul mărimii a treia nu întrece în mărime multiplul celei de-a patra mărimi, atunci prima mărime către a doua are un raport mai mare decât a treia către a patra". (Expunerea lui Heath urmează „*Elementele*" lui Euclid).

Euclid: Axiomatica geometriei. Lui Hipocrat din Chios i se atribuie primele „*Elemente*", ulterior s-au înscris în aceeași direcție lucrările lui Leon și Theudios din epoca lui Platon, opera acestuia din urmă constituind baza predării matematicii în academia platonică și ulterior în școala peripatetică. Dar documente păstrate avem numai despre „*Elementele*" lui Euclid, opera clasică, cu o circulație largă, a doua după „*Biblie*". Construcția axiomatică a geometriei din „*Elemente*" are trei ingredienți esențiali: *definiții, axiome* și *postulate*, pe care le prezentăm în cele ce urmează după O. Becker [1, p. 111-113].

Definiții

1. Punctul este ceea ce nu are părți.
2. Linia este o lungime față lățime.
3. Extremitățile unei linii sunt puncte.
4. O linie dreaptă (o dreaptă) este aceea care față de punctele de pe ea este la fel situată.
5. O suprafață este ceea ce are numai lungime și lățime.
6. Extremitățile unei suprafețe sunt linii.
7. O suprafață plană este aceea care față de dreptele de pe ea este la fel situată.
8. Un unghi plan este înclinarea a două linii într-un plan una față de alta, care se întâlnesc fără să fie situate pe aceeași dreaptă.

9. Dacă liniile care cuprind între ele unghiul sunt drepte se numeşte *rectiliniu*.

10. Dacă o linie dreaptă, ridicată pe altă linie dreaptă, formează împreună unghiuri alăturate egale, atunci fiecare din aceste unghiuri egale este un unghi drept; şi linia dreaptă ridicată se numeşte *perpendiculară* pe aceea pe care stă.

11. *Obtuz* se numeşte unghiul care este mai mare decât un unghi drept.

12. *Ascuțit*, dacă este mai mic decât un unghi drept.

13. *Margine* este ceva unde se termină.

14. O *figură* este ceva ce este cuprins de una sau mai multe margini.

15. *Cercul* este o figură plană, cuprinsă de o singură linie numită circumferință (arc), care are proprietatea ca toate dreptele duse de la un punct situat înăuntru figurii până la linie (circumferința cercului) sunt egale între ele.

16. Şi *centrul* cercului se numeşte acel punct.

17. *Diametrul* cercului este orice dreaptă dusă prin centrul mărginit de ambele părți de circumferință; această dreaptă are proprietatea că împarte în două părți egale cercul.

18. *Semicerc* este figura mărginită de diametru şi de arcul tăiat de diametru (şi centrul la semicerc este acelaşi punct ca şi la semicerc).

19. (20–23). *Figuri rectilinii* sunt acelea care sunt mărginite de drepte; *trilaterale*, de trei drepte; *patrulatere*, de patru drepte; *multilaterale*, de mai mult de patru drepte.

20. (24-26). Dintre figurile trilaterale, *triunghiul echilateral* este figura cu trei laturi egale:

triunghiul isoscel este figura cu numai două laturi egale; *triunghiul scalen* este figura cu trei laturi neegale.

21. (27–29). Mai departe, dintre figurile trilaterale, *triunghiul dreptunghic* este figura cu un unghi drept; *triunghiul obtuzunghic* are un unghi obtuz; *triunghiul ascuțitunghic* are trei unghiuri ascuțite.

22. (30–34). Dintre figurile patrulatere, *pătratul* este figura care este echilaterală şi dreptunghiulară;

dreptunghiul este figura care are unghiurile drepte, dar nu este echilaterală;

rombul este figura care este echilaterală, dar nu are unghiuri drepte;

romboidul este figura în care laturile opuse, ca şi unghiurile (opuse), sunt egale între ele şi care nu este echilaterală, nici dreptunghică. Celelalte figuri patrulatere se numesc trapeze.

23. (35). *Paralele* sunt liniile drepte care sunt situate în acelaşi plan şi care, dacă sunt prelungite în ambele părți la infinit, nu se întâlnesc în niciuna.

Postulate

Se cere:

1. Să se poată duce de la orice punct o dreaptă la orice punct.

2. Să se poată prelungi în continuare orice linie dreaptă, limitată tot printr-o linie dreaptă.

3. Să se poată descrie un cerc din orice centru şi cu orice distanță.

4. (Axioma 10). Ca toate unghiurile drepte să fie egale între ele.

5. (Axioma 11). Dacă o linie dreaptă tăind două linii drepte formează unghiuri interne de aceeaşi parte mai mici decât două unghiuri drepte, cele două linii drepte prelungite la infinit să se întâlnească de acea parte în care sunt situate unghiurile mai mici decât două unghiuri drepte.

Axiome

1. Cele egale cu acelaşi sunt egale între ele.

2. Dacă la egal se adună egale, sumele (întregi) sunt egale.

3. Dacă din egale se scad egale, resturile sunt egale.

4. Cele care coincid sunt egale.

5. Întregul este mai mare decât partea.

Aceste propoziții se referă, în primul rând, la mărimi geometrice (drepte, unghiuri, arii etc.).

2.2. ONTOLOGIA MATEMATICII ELINE CLASICE

I. Toth [1, p. 253] surprinde admirabil specificul ontologiei matematicii greceşti, arătând că dominantele acesteia sunt pronunţat platoniciene, şi am adăuga şi pitagoriciene, „capturate fericit" în sintagma „refuzul creaţiei", descoperirea, mai curând, şi nu construcţia entităţilor matematice, fiind activitatea autentică a matematicianului. În lucrarea citată, I. Toth [1] scrie textual: „Refuzul creaţiei caracterizează nu numai filosofia platonică, ci toate filosofiile greceşti, indiferent de coloratura lor; ea iradiază cu o neobişnuită intensitate şi din filosofia lui Aristotel şi constituie una din componentele esenţiale ale spiritului elin în toate aspectele şi sub toate laturile sale. La greci nici măcar zeii nu creează, ideea creaţiei este ignorată complet de întreaga mitologie populară elină. Acest refuz al creaţiei - conştiinţa nefericită a creaţiei, contemplarea conştientă a actului creator, asociat de refuzul său conştient - izbucneşte pentru prima dată cu forţa elementară a unui fenomen natural în filosofia eleată".

Poate că cel mai izbitor fenomen al începuturilor matematicii greceşti l-a reprezentat aritmetica computaţională, prelungită în viaţa practică zilnică în aşa-numitul folclor computaţional, amplu teoretizată în relaţie cu aritmetica teoretică de filosofia pitagoreică. Succesele aritmeticii computaţionale au sugerat posibilitatea înlocuirii operaţiilor practice cu diversele mărimi materiale prin numere şi calcule, fapt interpretat ca „invadarea şi cucerirea oarbă a lumii exterioare de către aritmetica computaţională". Impresia puternică a acestei situaţii a condus la aserţiunea, centrală în filosofia pitagoreică: „*lucrurile sunt numere*", devin inteligibile prin intermediul numărului, încât s-a conchis că ceea ce nu poate fi exprimat prin număr rămâne ininteligibil, inaccesibil pe veci cunoaşterii (DielsKranz [1]). Filosofia pitagoreică a considerat că *numărul* reprezintă substanţa comună, principiul tuturor lucrurilor, şi chiar relaţiile dintre lucruri sunt exprimabile în raporturi dintre numere. Dacă în mod obişnuit considerăm că *obiectul* este aspectul relevant pentru o *ontologie* „*substanţialistă*", care „*ipostaziază*" în maniera platoniciană, atunci ontologia matematicii pitagoreice nu are această înfăţişare, căci ea include şi noţiunea de *raport* şi *teoria raporturilor*.

În plan ontologic există o diferență-distincție între aritmetica computațională şi cea teoretică, aceasta din urmă refuzând, cum remarca J. Klein [1, p. 45-52], existența conceptului de fracție numerică drept entitate matematică, numerică; cum folclorul computațional grecesc a consacrat utilizarea fracțiilor numerice, matematicienii pitagoreici au recurs la un „*substitut*" al acestora, tocmai în vederea evitării lor, şi aceasta au făcut-o cu ajutorul unei ingenioase construcții artificiale – raportul – şi, prin urmare, au elaborat o *teorie a rapoartelor*. Putem afirma că ontologia matematicii pitagoreice este suficient de complexă, lumea entităților matematice nefiind reductibilă la numere, căci pe lângă acestea mai există şi rapoarte. La acest nivel de dezvoltare a matematicii greceşti antice, universul matematic (al obiectelor matematice) conține două subuniversuri: subuniversul *logosului (rapoartelor)* şi subuniversul *numerelor*, şi care sunt, totuşi, de naturi diferite, chiar şi operațiile cu aceste două genuri de entități fiind, de asemenea, diferite, deoarece înmulțirea numerelor este diferită de compunerea rapoartelor. Introducerea numerelor raționale a putut fi evitată încă o perioadă; (excepție face, două secole mai târziu, Arhimede care a făcut uz de calculul cu numere fracționare, dar numai ocazional). Tendința constantă a perioadei la care ne referim a fost cea a refuzării dreptului la existență a unor concepte numerice care nu respectă legile fundamentale ale universului de numere. Şi totuşi, aşa cum remarca I. Toth [1, p. 258], „teoria logosului constituie fructul pozitiv cel mai important al unei conştiințe scindate de imposibilitatea de a renunța la numerele raționale şi de imposibilitatea de a le accepta, cel puțin de a le accepta în mod deschis". Filosofia pitagoreică afirma că oricărui raport de numere (p, q) îi putem face să corespundă un raport între două mărimi omogene, să spunem două segmente A şi B; M fiind unitatea de măsură convențională, se poate construi un segment A = p.M şi alt segment B = q.M, caz în care avem (A,B) = (p.q); dar şi reciproca este adevărată, că fiind date două segmente A şi B luate arbitrar, va exista o pereche de numere (p,q). Există, deci, o structură izomorfă între universul logosului şi universul numerelor raționale, dar aceste universuri nu sunt identice, deoarece ele

posedă naturi diferite. Într-adevăr, relația dintre cei *doi* „*locuitori*" ai universului matematic, *număr și raport*, poate fi clarificată și mai convingător, dacă vom observa că „teoria pitagoreică a rapoartelor este în esență identică cu teoria actuală a claselor de perechi de numere ordonate, perechi supuse unor reguli formale de calcul" (I. Toth); însă, matematicienii eleni nu au dat numele de număr unei clase de rapoarte echivalente, deoarece în viziunea lor raportul a două numere nu se supune definiției numărului. Totuși, în lumina teoremei de indivizibilitate a monasului se marchează efortul de a reduce întreaga teorie a rapoartelor la universul numerelor naturale, deoarece rapoartele sunt considerate relații între două numere naturale și nu entități matematice distincte; legile care guvernează universul numerelor întregi rămân relevante și în studiul universului rapoartelor.

Subuniversurilor de numere și rapoarte li se adaugă în cursul evoluției matematicii antice grecești universul *entităților geometrice* ale planului, care include un „*intrus straniu*" – *numărul irațional*. Problema existenței matematice dobândește treptat o mai pregnantă dimensiune geometrică, știința geometriei contribuind la „expansiunea ontologică" a universului de entități matematice, în acest sens, teoremele de imposibilitate având un rol semnificant; într-adevăr, ceea ce este imposibil în universul rapoartelor este realizabil în domeniul geometric al planului, deoarece fiind date două segmente oarecare, de exemplu 12 și 6, se poate construi, cu ajutorul riglei și al compasului, într-un număr finit de pași, segmentul X care reprezintă media lor geometrică, numită așa pentru că nu este realizată cu operații aritmetice, ci geometrice; media aritmetică

$A = \frac{1}{2}(M + N)$, iar cea armonică $H = 2.M.N./(M+N)$, (I Toth [1, p. 261]).

Aceste *teoreme de non-existență* au în *plan* efectul clasificării segmentelor planului în două clase disjuncte, ambele având statut de existență, cu diferența că unor argumente li se poate asocia un raport, logos, în timp ce altora nu, adică nu au *rație*, sunt *alogos*, adică lipsite de rație (*irație*).

Un excelent comentariu al relației dintre universul logosului şi universul segmentelor din plan, *din contactul* acestor universuri rezultând conceptul de *segment irațional* găsim în cartea lui I. Toth [1, p. 262–263]: „Teorema de imposibilitate rămâne închisă în interiorul universului logosului, ca o lege pur interioară a acestuia. Teorema de imposibilitate din domeniul universului logosului nu constituie o demonstrație de existență a segmentelor incomensurabile... în epoca lui Architas, incomensurabilitatea era încă necunoscută, contestând astfel valabilitatea mărturiilor care atribuie descoperirea incomensurabilelor pitagoreicilor de la mijlocul secolului al V-lea (cu jumătate de secol înaintea lui Architas). Dar, la Platon [2], [3], elev şi contemporan mai tânăr al lui Architas, apare de acum, în mod evident, cunoaşterea precisă şi clară a faptului că ceea ce este imposibil în domeniul rapoartelor – construirea mediei geometrice care descompune octava în două consonanțe omonime – este posibil în plan, prin construcțiile specifice planului". I. Toth apreciază ca un fapt surprinzător că Architas nu a sesizat conexiunea dintre construirea mediei geometrice şi teorema de imposibilitate. Descoperirea segmentelor care nu se pot exprima cu ajutorul logosului a două numere, de exemplu, cazul mediei geometrice a segmentelor 2 şi 1, semnifică o reducere la absurd a filosofiei pitagoreice şi probabil de aici tendința de ignorare a specificului acestor segmente, a importanței lor pentru matematică. Ontologia matematicii greceşti antice e incompatibilă cu *creația*, ori *numărul irațional* este o entitate care nu se conforma principiilor acestei teorii a existenței. Explicitarea acestei entități matematice cu ajutorul definiției date de Dedekind (cu ajutorul „*tăieturilor*" *Dedekind*) evidențiază faptul că geneza ei a antrenat o metamorfoză a non-existenței în existență, „*o creație* săvârşită de Spirit" (I. Toth [1, p. 116]).

Incomensurabilitatea a subminat „*intuiționismul aritmetic*" integral, propriu filosofiei pitagoreice, care considera fundamentale intuiția primară a numărului natural şi operațiile finite cu acesta. Acum „*intuiția primară a dreptei indefinit divizibile*" stă la baza matematicii, *finitismul constructivist* rămâne şi în noile condiții fundamentul filosofic al

matematicii eline. „Există segmente incomensurabile inexprimabile cu ajutorul logosului a două numere, dar aceste segmente sunt toate constructibile în plan cu ajutorul riglei şi al compasului, aplicate de un număr finit de ori..., cu alte cuvinte, în acest univers pitagoreic au existat numai acele segmente care pot fi construite cu ajutorul următoarelor operații geometrice: împărțirea segmentului unitar într-un număr finit de q părți egale şi lipirea cap la cap a unui număr, de asemena finit, de p asemenea părți" (I. Toth [1, p. 286]). Dacă filosofia pitagoreică formula ca *axiomă-criteriul de existență* - fiecărei perechi arbitrare de segmente îi corespunde un logos a două numere întregi, acum noua matematică elină sub impactul descoperirii segmentelor incomensurabile, pentru a le accepta ca entități legitime în ontologia, extinsă, formulează ca *axiomă de existență*: au existență numai acele segmente, raționale sau iraționale, care pot fi construite în *manieră finitistă*, într-un număr finit de paşi cu ajutorul riglei şi compasului, plecând de la segmentul unitar convențional considerat.

Matematica elină s-a identificat în plan ontologic cu filosofia platoniciană a ideilor, în sensul că obiectele matematice preexistă rațiunii umane şi nu sunt introduse pe calea unui act creator care rezidă, cum spune I. Toth [1, p. 303], într-o operație „prin intermediul infinitului în act, care consta mereu în transformarea non-existenței în existență". *Intuiționismul* vechilor greci în sfera matematicii s-a manifestat prin *constructivism* şi *finitism*. În ontologia matematicii eline *infinitul actual* nu are legitimitate, el poate fi înlocuit prin *infinitul potențial*, care este *finitul nedeterminat*, arbitrar de mare sau de mic. Ori, modalitatea indicată de Zenon pentru definirea lungimii constituie un infinit în act, ca şi definirea lungimii diagonalei pătratului cu ajutorul unui algoritm euclidian infinit, ceea ce generează paradoxul; o cale ce poate fi evitată în practica matematică.

Axioma care legitimează ontologia entităților matematice recunoaşte ca existență efectivă numai ceea ce este rațional, adică ceea ce poate fi exprimat într-un discurs efectiv constructibil, o concepție care reduce «*aporia Ahile*» la cea a Dihotomiei. Deci, a exista poate fi definit într-un discurs finit, iar pentru a fi definit nu este necesară

succesiunea infinită, nesfârşită. Aristotel [3] credea în posibilitatea reducerii *aporiei Ahile* la cazul Dihotomiei. Filosoful Aristotel era convins că există o demarcaţie netă între *infinitul în potenţă* şi *infinitul în act*, distincţie ce permite evitarea paradoxului nu numai în matematică, ci şi în universul gândirii. De acord cu Zenon, Stagiritul afirmă că infinitul în act conţine contradicţii. Spre deosebire de Zenon, Aristotel crede că mişcarea poate fi descrisă fără a recurge la infinitul în act, prin apel numai la finitul arbitrar de mare. Evitat în cazuri particulare, infinitul actual nu poate fi eliminat din universul gândirii, infinitul în act este acceptat odată cu ideea mişcării de-a lungul unei traiectorii continue.

2.3. DIALECTICA GREACĂ ŞI AXIOMATICĂ

Cuvântul „*dialectica*" a avut înţelesuri diferite în diferite perioade ale filosofiei. La început „dialectică" desemna metoda de argumentare proprie metafizicii şi este derivat din verbul „*a discuta*". Aristotel [4] considera premisa dialectică ca una aleasă de unul din participanţii la discuţie. Platon [5] postulează teza: *cunoaşterea este percepere*, din care Socrate trage concluzia ce-l determină pe Teetet să părăsească această teză; de fapt, dialogurile platoniciene excelează în apelul la această metodă, care procedează la examinarea ipotezelor prin derivarea consecinţelor din ele, aproximativ după schema: „dacă P, atunci Q; dar nu Q, deci nu P", model tipic de argumentare pentru respingere folosit de Socrate împotriva opiniilor necritice susţinute, în dezbatere, discuţie, de contemporani, dar şi în raţionamentele metafizice prin *reductio ad impossibile* de către Zenon din Eleea. De fapt Zernon (vezi şi Platon [1]) este considerat inventatorul dialecticii, el însuşi influenţat de folosirea ei în matematica pitagoreică; în fapt, incomensurabilitatea diagonalei cu latura pătratului (respectiv iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$) a fost o descoperire a pitagoreilor, iar demonstraţia propoziţiei respective se face prin „*înaintarea la imposibil*".

Aşadar, primul înţeles al termenului „*dialectică*" a fost *reductio ad impossibile* în metafizică. Spre deosebire de versiunea lui Zenon, nu este obligatoriu ca din ipoteze să fie trase consecinţe autocontradictorii, ci numai false. Astfel, Platon [6] susţine că orice respingere a ipotezelor trebuie să procedeze prin deducerea unor consecinţe autocontradictorii, dar nu este obligatoriu ca toate argumentele să respecte această schemă. Platon [7] va înţelege prin dialectică o metodă de argumentare ce implică respingerea, dar care conduce în cele din urmă la rezultate pozitive de mare generalitate... interpretarea pasajelor în cauză este extrem de controversată (W. şi M. Kneale [1, p. 18]). Mai târziu, constată aceiaşi autori, Platon [8], [4], [9], [10] transferă numele de dialectică asupra metodei diviziunii şi reunirii.

Generalizarea sensului termenului dialectică aparţine lui Aristotel - numele ştiinţei argumentării din premise, mergând până la cuprinderea cercetării raţionamentului valid, în general.

Transformarea matematicii empirice şi practice în ştiinţă deductivă, bazată pe definiţii şi axiome, este un fenomen care a avut loc în Grecia antică şi constituie un capitol de seamă în istoria matematicii. Orientul antic nu a cunoscut conceptul de *ştiinţă deductivă*, în consecinţă nu se opera cu teoreme şi demonstraţii, în fapt *conceptele de deducţie, definiţie, axiomă* nefiind constituite.

Matematicienii elini sunt primii care folosesc aceste concepte, ei nemaifiind satisfăcuţi de cunoaşterea matematică practică, empirică; în viziunea lor, matematica nu trebuie concepută ca o colecţie de prescripţii matematice, ci ca o ştiinţă, teorie deductivă. Cunoştinţele matematice achiziţionate sunt legitimate în noua concepţie prin invocarea de raţiuni teoretice, ceea ce semnifică o schimbare de criteriu al adevărului, o tranziţie de la justificarea prin practică la cea teoretică; această mutaţie în câmpul matematicii, cu implicaţii şi rezonanţe epistemologice şi metodologice, a fost apreciată ca fiind în mare măsură datorată impactului filosofiei, în speţă al dialecticii eleate asupra acestei ştiinţe. Matematica datorează enorm adaptării dialecticii eleate la genul de cunoaştere practicat de această ştiinţă. A. Szabo [1] a făcut un expozeu interesant

asupra conexiunilor istorice dintre filosofie şi axiomatică, invocând în special relaţia dintre dialectica eleată şi axiomatica lui Euclid. Teza centrală a expunerii sale este următoarea: „«principiile» matematice ale lui Euclid au fost o adaptare a «ipotezelor» dialecticii, iar demonstraţia indirectă, utilizată frecvent în textele matematice, îşi are originea în dialectică".

El a relevat, în acest context, că maturitatea matematicii marcată prin trecerea de la „justificarea prin practică sau experienţă" – proprie începuturilor matematicii, chiar demonstraţiile matematice ale lui Thales erau foarte aproape de un caracter empirico-intuitiv – la „justificarea prin raţiuni teoretice", precum şi organizarea ei deductiv-axiomatică a asimilat o puternică influenţă a filosofiei greceşti antice, îndeosebi a dialecticii eleate. Matematica a împrumutat de la dialectică (în primul rând, cea eleată) terminologia şi metodele (demonstraţiile indirecte); în fapt, *principiile matematice*: definiţii, postulate, noţiuni comune sau axiome sunt echivalentul terminologic al *ipotezelor* asumate de partenerii „*dezbaterii dialectice*". Opinia lui P. Bernays [1] este contrară, susţinând că trebuie separată terminologia de metode, deoarece prima este variabilă, ceea ce nu poate explica cum metodele geometrilor au fost aceleaşi ca ale filosofilor, numai în virtutea terminologiei adoptate de la aceştia din urmă. Dar, A. Szabo [2] în replică, a arătat că şi „distincţia epistemologică" dintre cele trei tipuri de asumpţii iniţiale – definiţii, postulate şi noţiuni comune - care fondează „*Elementele*" lui Euclid – poate fi conturată suficient de clar din perspectiva dialecticii eleate. După cum se ştie, demonstraţia indirectă a fost de importanţă centrală, având rolul unui instrument de „*justificare teoretică*" a tezelor pe care le promovau, relevând contradicţiile prezente în propoziţiile opuse tezelor eleatice. În consecinţă, A. Szabo [1, p. 24] scrie expres: „Şi acum deoarece întreaga terminologie şi metoda demonstraţiei indirecte în matematică sunt exact identice cu terminologia şi metoda demonstraţiei indirecte din dialectica eleată, noi putem cu greu rezista argumentului că dezvoltarea matematicii deductive are să fie explicată în termenii influenţei filosofiei eleate".

Referitor la analogia de terminologie existentă între utilizarea filosofică şi cea matematică, Proclus [1, p. 123] scrie: „Deoarece noi afirmăm că această ştiinţă, geometria, se bazează pe ipoteze şi demonstrează consecinţele deduse din anumite principii - căci numai o ştiinţă este fără ipoteze, celelalte însă primesc principiile lor de la aceasta - atunci autorul unei cărţi elementare de geometrie trebuie neapărat să expună separat principiile ştiinţei, dar trebuie să justifice consecinţele deduse din principii. Căci, nici o ştiinţă nu-şi demonstrează propriile sale principii şi nu le pune în discuţie".

Matematica pleacă de la principii (υποτεςις) care sunt de trei tipuri: definiţii, postulate, axiome, admise fără demonstraţie şi din care deduce teoreme, de aceea ea este considerată o „*ştiinţă ipotetică*". Atunci apar, în mod normal, remarcă A. Szabo [1], următoarele chestiuni: 1) cum au ştiut matematicienii din Grecia Antică că ştiinţa lor este una ipotetică şi că ei trebuie să plece de la enunţuri care nu trebuie să fie demonstrate? 2) cum „*au descoperit*" ei care sunt acele „*enunţuri prime*" privilegiate care nu trebuie demonstrate? Influenţa filosofiei asupra matematicii ne apare acum direct relevantă. Socrate (cf. Platon [7]) pare să răspundă la prima întrebare, atunci când spune că matematicianul ia conceptele sale „*egal*", „*par*", „*figuri*", „*unghiuri*" ca bază, punct de plecare în investigaţie şi nu se simte constrâns să le explice, adică pleacă de la principii – conceptele menţionate, ca şi alte concepte matematice, formând ceea ce numim „ipotezele" matematicii. Trebuie operată o distincţie privind semnificaţia termenului „ipoteză", căci semnificaţia originară a lui υποτεςις era diferită de cea asumată de moderni în cuvântul ipoteză (azi desemnând o teorie ce urmează să fie confirmată). Grecii vechi înţelegeau prin ipoteză, baza sau punctul de plecare într-o dezbatere asupra căruia participanţii la conversaţie, discuţie, cădeau de acord. Răspunsul la a doua întrebare pare sugerat de practica dialecticii (conversaţie desfăşurată după un anumit mod de argumentare şi demonstrare a tezei la grecii vechi). Partenerii la dezbatere trebuiau să conceadă că trebuie admisă ca adevărată o anumită „*aserţiune mai puternică*", urmând ca tot ce trebuie acceptat ulterior să fie în „*acord*

logic" cu această *asumpție fundamentală tare*. În cazul conceptelor matematice invocate în Platon [6], definițiile lor aveau rolul de ipoteze, aserțiuni acceptate fără demonstrație.

Metoda supralicitată în matematica greacă a fost „*demonstrația indirectă*" şi a fost împrumutată din filosofie. Înțelegerea semnificației demonstrației indirecte trimite la înțelegerea utilizării ipotezelor în dialectică şi matematică. Platon [6], prin intermediul lui Socrate, caracterizează metoda în cauză astfel: „Eu întotdeauna plec în gândirea mea de la o aserțiune, judecată de mine să fie mai *tare* (s.n. M. Ț.). Această aserțiune este ipoteza mea; şi ce pare să se armonizeze cu această aserțiune, eu consider adevărat. Dacă eu văd oricum că ceva nu este în armonie cu aserțiunea tare precedentă, eu îl privesc ca neadevărat".

Comentariul pasajului din „Phaedon" relevă mai întâi că ipotezele sunt puncte de plecare (şi în dialectică şi în matematică, cf. Szabo [1]) şi, în al doilea rând, Socrate doreşte să stabilească ce este în acord cu asumpția inițială (ipoteza). Dar cum se determină acest lucru este tocmai sarcina demonstrației. În acest cadru se poate elucida ideea *demonstrației indirecte*, dar mai ales este necesară o remarcă preliminară: uneori, termenul „ipoteză" a avut şi rolul de „*tentative assertion*" făcută pentru a investiga propriul ei adevăr (semnificație aproape identică cu cea introdusă de moderni, observa Szabo [1]). Următorul exemplu de demonstrație indirectă, datorat lui Platon [7], este revelator pentru cea de-a doua semnificație a termenului „ipoteză": „cunoaşterea şi percepția senzorială sunt identice" este enunțul ce urmează să-l investigăm, examinând consecințele deduse din el. A vedea şi a cunoaşte sunt identice în virtutea acestui enunț-ipoteză, adică o persoană care vede ceva, cunoaşte ceva şi o persoană care nu vede ceva, nu cunoaşte ce nu vede. Presupunem că o persoană vede un lucru şi, conform ipotezei, cunoaşte acel lucru şi când închide ochii; însă când închide ochii, nu vede acel lucru şi conform ipotezei, nu poate cunoaşte acel lucru. Dar, în mod clar, persoana va cunoaşte, chiar cînd închide ochii ceea ce a văzut când avea ochii deschişi. Deci, din ipoteza noastră – cunoaşterea şi percepția senzorială sunt identice – am derivat o contradicție: persoana nu cunoaşte

acel lucru şi că persoana cunoaşte acel lucru, ceea ce asertează că ipoteza noastră iniţială nu este adevărată şi că, prin urmare, este adevărată negaţia ei: „*cunoaşterea nu este identică cu percepţia senzorială*" – teza centrală a epistemologiei platoniciene.

A. Szabo [1, p. 26] enunţă următoarele două caracteristici ale demonstraţiei indirecte: i) în demonstraţia indirectă nu încercăm să demonstrăm aserţiunea pe care o apreciem ca adevărată, ci, mai curând, încercăm să respingem aserţiunea contrară; dar, a respinge aserţiunea opusă echivalează cu a demonstra aserţiunea care ne interesează, căci sau A este adevărat sau opusul lui A, a treia posibilitate nu există; respingând una din cele două aserţiuni, cealaltă urmează în mod necesar să fie adevărată; ii) în demonstraţia indirectă noi respingem o aserţiune arătând că ne conduce la o contradicţie. Platon consideră demonstraţia indirectă o formă specială de demonstraţie matematică; ea este găsită în Euclid. După Aristotel, pitagoreii au folosit-o în demonstraţia *incomensurabilităţii*.

Filozofia greacă, în special cea eleată (doctrinele lui Parmenide şi ale lui Zenon) abundă în demonstraţii indirecte, care relevă contradicţii în cadrul propoziţiei contrare tezelor susţinute.

W. C. Kneale [1] contestă prioritatea folosirii metodelor *reductio ad absurdum* în filozofie, afirmând că, cu mult înainte ca Zenon eleatul să-şi dezvolte „teoria sa metafizică" bazată pe demonstraţia reducerii la absurd, a circulat, printre pitagoricieni, o versiune mai veche a demonstraţiei prin reductio ad absurdum, a enunţului privind „*incomensurabilitatea diagonalei cu latura unui pătrat*" şi care a fost păstrată în secret, numai din motive religioase, fiind în incompatibilitate cu „structura raţională" a universului. În consecinţă, W. C. Kneale [1] pledează pentru o distincţie „mai fină" între uzul metafizic al metodei *reductio ad absurdum* identificat cu dialectica şi metoda însăşi a reducerii la absurd.

J. R. Lucas [1] afirmă că dacă eleaţii au produs argumentul *reductio ad absurdum*, lui Platon, însă, îi aparţine meritul de a fi formulat explicit „*idealul axiomatizării*" ca ceva de realizat în mod conştient, încât cartea a şaptea a „*Republicii*" pare să anunţe „*the programme of*

studies for the Institute of Advanced Studies at Athens", iar discipolul său, Eudoxus, a dus suficient de departe programul platonician.

Într-adevăr Platon [7] elaborează o adevărată metodologie a „*argumentului deductiv*", pe care îl schițase deja în „Phaedon", marcând mutații esențiale în filozofia sa generală ca şi în stilul său, revelate de trecerea de la „dialoguri" la „monologuri" şi depăşind „faza neformală a dialecticii" prin formularea de ipoteze bine definite din care decurg prin „dianoia" alte enunțuri. Ipoteza, în viziunea de acum a lui Platon, nu mai este doar o asumpție care serveşte unui caz particular, ci o *axiomă fundamentală*, care nu mai poate fi chestionată de nimeni, nici chiar de sofişti, matematica urmând să fie expusă ca dedusă din astfel de principii, ce nu pot fi puse în discuție.

Comentatorii şi istoricii filozofiei şi matematicii greceşti antice nu susțin unanim, sau mai precis, nu atribuie un rol decisiv lui Platon în dezvoltarea matematicii antice. În timp ce H. G. Zeuthen în „*Sur les connaissances geometriques des Grecs avant la reforme platonicienne*" consideră că Platon este cel care a inițiat matematica greacă deductivă axiomatică prin lansarea unui program de studii avansate asupra matematicii, cum aformă şi Lucas [1], alți autori, precum Szabo [1], susțin că „*axiomatizarea*" şi „*deductivizarea*" matematicii s-au constituit ca un proces independent de idealul formulat de Platon pentru matematică. Oricum, cei mai mulți autori, inclusiv Szabo, recunosc influența filosofiei în constituirea metodologiei deductiv-axiomatice pentru matematică, numai că ultimul autor susține că atât matematica deductivă a lui Euclid cât şi opera lui Platon succed filosofiei eleate; în plus, Platon a avertizat asupra faptului că gândirea matematică poate servi drept „paradigmă" pentru întreaga cunoaştere ştiințifică.

Se cuvine, în consens cu Szabo, să observăm că filosofia eleată a fost fecundă şi influentă în spațiul culturii antice greceşti; se recunoaşte că una din axiomele lui Euclid („*întregul este mai mare decât partea*") s-a constituit genetic ca răspuns la unul dintre paradoxurile lui Zenon, discipol al lui Parmenide, şi reprezentant al şcolii din Eleea. Unul dintre paradoxele lui Zenon, citat de Aristotel, este aserțiunea: „jumătatea

timpului este egală cu dublul ei"; dacă aici „*whole time*" (timp întreg) şi „*half time*" (timp jumătate) sunt luate ca mulţimi infinite, ceea ce se pare că este cazul, atunci chiar dacă nu sunt egale în întregime, sunt măcar echivalente în sens „Set teoretic" (în sensul teoriei mulţimilor) şi, prin urmare, aserţiunea „*half time is equal to its double*" nu poate fi respinsă. Atunci Zenon a avut dreptate, dar trebuie să operăm distincţia: Zenon s-a referit la mulţimi infinite, în timp ce Euclid a avut în vedere mulţimi finite. Rolul axiomelor în matematica elină era acela de a fixa o bază pentru curmarea neînţelegerilor, dezacordurilor.

Se impun în încheiere unele remarci de ordin metodologic; 1) care era statutul demonstraţiilor la vechii greci? 2) cunoşteau vechii greci faptul că *nu există o distincţie esenţială* între lucruri (enunţuri) pe care le demonstrăm şi lucruri (enunţuri) pe care le asumăm fără demonstraţie, fapt relevat de axiomatica modernă?

Referitor la problema 1) L. Kalmar [1] menţionează existenţa a două tipuri de demonstraţii prin reducere la absurd: a) o demonstraţie a teoremei ρ prin asumarea negaţiei acesteia, $\sim \rho$, şi derivarea din aceasta a propoziţiei q a cărei negaţie deja a fost demonstrată; această demonstraţie are la bază principiul terţiului exclus; al doilea tip de demonstraţie: b) o demonstraţie în care se vizează respingerea (disproof) unei aserţiuni ρ, asumând-o şi derivând din ρ o propoziţie q a cărei negaţie a fost deja demonstrată şi care nu cere, chiar în conformitate cu exigenţele standard ale logicii matematice, principiul terţiului exclus.

Dacă este anistoric să pretindem vechilor greci să fi fost atenţi la o asemenea distincţie subtilă, lucru cu care este de acord L. Kalmar, putem totuşi preciza ce tip de demonstraţie au practicat dacă examinăm textele matematice transmise. Remarca lui A. Robinson [2] se înscrie potrivit în acest context evocat: „când Euclid arată că orice număr compus are un divizor prim, el foloseşte metoda descreşterii infinite (the method of infinite descent) concluzionând ceea ce este imposibil pentru numere... Un intuiţionist contemporan va respinge această demonstraţie deoarece încearcă să stabilească demonstraţia unui enunţ existenţial pozitiv". Este

evident că demonstrațiile indirecte folosite de grecii antici se bazau pe terțiul exclus.

Problema 2) cere o precizare care nu implică un răspuns cert; examinarea unor texte din opera lui Aristotel relevă faptul că pot exista aserțiuni în mod natural „mai simple" şi al căror adevăr nu poate fi chestionat, putând servi ca punct de plecare. Este discutabil însă, conchide A. Szabo [1], că vederile aristotelice au fost împărtăşite de matematicienii contemporani filosofului din Stagira; dar o analiză a conceptului aristotelic despre ştiință (vezi 2.10) prezintă relevanțe semnificative pentru subiectul abordat aici.

2.4. MATEMATISMUL PITAGOREIC

Aristotel consemnează că pitagoreii şi-au consacrat viața studiului matematicii, ei crezând că principiile acestei ştiințe sunt principiile tuturor lucrurilor. În contrast cu „*materialitatea*" principiilor milesienilor (apa, aerul, apeironul etc.), pitagoreii au susținut că „toate lucrurile sunt numere", un enunț care interpretat modern logic n-are sens, dar pentru Pythagoras şi discipolii săi avea totuşi, dacă luăm în considerare descoperirile remarcabile ale acestei şcoli, ca de pildă, cuantificarea fenomenului muzical. Şi de aici conexiunile ce se pot stabili între matematică şi muzică şi nu numai atât, căci aplicațiile-ilustrări ale concepției pitagoreice sunt prezente şi în câmpul medicinii, legat de fenomenul de sănătate şi altele. Şi sunt inerente supoziții „atomiste", conform cărora lumea poate fi gândită „*atomar*", corpurile fiind construite din molecule alcătuite din atomi organizați în diferite configurații; putem conchide că Pitagora a sperat să facă din aritmetică un studiu fundamental relevant nu numai pentru estetică şi pentru fizică, în sens larg, incluzând şi o anumită viziune astronomică, dar chiar şi pentru etică, ale cărei conexiuni profunde cu religia sunt transparente nu numai la nivelul doctrinei ci şi al modului de viață adoptat de membrii confreriei. Proclus [1] relatează: „Adăugând la strădaniile acestora (i.e.

Thales şi Mamercos) studiile sale, Pythagoras a transformat filosofia referitoare la geometrie, pentru a-i da configuraţia unei educaţii liberale, examinând principiile ei de bază, cercetând raţional şi abstract teoremele acestei ştiinţe. El, de fapt, descoperise şi teoria numerelor iraţionale (sau a proporţiilor) ca şi construcţia figurilor cosmice. Cercetările teoretice fundamentale inspirate şi propulsate de geometria dezvoltată de Pythagoras erau menite, după unii interpreţi, să fundeze un tip de educaţie umanistă liberală, în contextul căreia menţionata disciplină ştiinţifică statua locul şi, poate, rolul individului în univers, modelându-l ca om liber. În concepţia şcolii pitagoreice ştiinţele matematice încorporau aritmetica, geometria, astronomia şi armonia (muzica).

Tradiţia pitagoreică consemnează o triplă sursă de inspiraţie şi documentare în domeniul cunoştiinţelor de tip matematico-astronomic cu poziţie centrală în ansamblul doctrinei: calcule de geodezie şi arhitectură orientate astral datorate culturii egiptene; tradiţii de aritmetica socotitului preluate de la comercianţii feniceni; comput astral şi descrieri ale fenomenelor astronomice prezente în documentele chaldeilor.

Dar motivele şi interesul pentru preocupări ale domeniului matematic sunt de natură complexă, în care componenta religioasă pare a fi determinantă, căci pitagoreii, în frunte cu maestrul lor, făcuseră din problema purificării sufletului şi a nemuririi un ţel al vieţii. Ei considerau studiul matematicii ca cel mai bun purificator al sufletului. Iată de ce Pythagora este totodată întemeietor al unei secte religioase şi al unei şcoli de matematică, constructor sau cel puţin apărător al unei religii profunde spiritual, purificatoare a sufletului şi garanţie a nemuririi în serviciul căreia se aflau ştiinţele matematice.

Interesat şi preocupat de probleme mistice ale purificării şi nemuririi, Pythagora s-a îndreptat spre ştiinţă, în mod deosebit spre matematică al cărei studiu era destinat obţinerii „purgării sufletului", gândirea ştiinţifică şi matematică fiind considerată cel mai autentic şi pur mod de viaţă. Gândirea teoretică, proprie ştiinţei pure şi, prin excelenţă, specifică matematicii pure, purifică sufletul, deoarece eliberează omul de a gândi despre lucruri particulare, conducându-i gândirea şi reflecţia spre lumea permanentă şi ordonată a numerelor.

De fapt, doctrinele mistice, ca şi relaţia timpului cu eternitatea, sunt fortificate prin studiul matematicii pure. B. Russell [3, p. 56] notează în context următoarea reflecţie: „Combinaţia matematică şi teologie, care a început cu Pythagora, a caracterizat filosofia religioasă în Grecia, în Evul Mediu şi în timpurile moderne până la Kant. Orfismul anterior lui Pythagora era analogul religiilor misteriilor asiatice. Însă Platon, St. Augustin, Thomas Aquinas, Descartes, Spinoza şi Leibniz există un amestec intim de religie şi raţionament, de aspiraţie morală cu admiraţie logică a ceea ce este atemporal, care vine din Pythagora, şi distinge teologia intelectualizată a Europei de misticismul rudimentar necomplicat al Asiei".

Dar la ideea că „*toate lucrurile sunt numere*" au condus şi succesele aritmeticii computaţionale, fixate tradiţional în folclorul computaţional, şi care degajau morala: numerele şi calculele oferă posibilitatea înlocuirii mânuirii practice a lucrurilor; deci, numărul reprezintă substanţa comună, principiul tuturor lucrurilor, iar relaţiile dintre lucruri se pot exprima prin relaţiile dintre numere. S-a produs un fel de invadare a lumii exterioare de către această aritmetică computaţională şi fenomenul a condus la aserţiunea „lucrurile sunt numere", centrală în doctrina pitagoreică. Lucrurile devin inteligibile pentru om prin intermediul numărului pe care-l poartă, iar cunoaşterea lor rezidă în determinarea numărului lor propriu. Ceea ce nu poate fi exprimat prin număr rămâne neinteligibil, inaccesibil (cf. Diels-Krantz [2]).

Matematismul pitagoreic este în mod esenţial *aritmetism*, căci între ştiinţele matematice (*mathema*) aritmetica are o poziţie privilegiată, căci, pe de o parte, aceasta din urmă, în virtutea corelaţiei dintre numere şi mărimi – care pot fi eventual şi geometrice – mediază accesul aritmetismului la o concepţie despre existenţă şi chiar despre univers, evidenţiind principiul structurii şi ordinii în univers; iar, pe de altă parte, geometria, în evoluţia matematicii, va „*detrona*" aritmetica şi, odată cu ea, *intuiţia aritmetică*, marcând, în final, *eşecul aritmetismului*, al *filosofiei* pitagoreice, prin instaurarea *euclidianismului* care va domina până în epoca cartezianismului când se va produce, prin geometria

analitică (a coordonatelor) o „reabilitare" a aritmeticii. Tratarea geometriei independent de aritmetică, provocată de dificultățile „incomensurabilelor", este conştientizată şi în unele dialoguri ale lui Platon şi executată cu perfecțiune în „*Elementele*" lui Euclid. Doctrina pitagoreică a fost facilitată în demersul ei constitutiv de practica adepților numărării şi a scrierii numerelor, asemănătoare actualei practici a reprezentării numerelor pe zar prin folosirea punctelor, (în virtutea principiului că numerele erau constituite din unități individuale marcate prin puncte: numărul *unu* era un singur punct, iar celelalte numere erau create prin adiția punctelor). Din această perspectivă dobândim înțelegerea unui aspect semnificativ, cel al relației dintre aritmetică şi geometrie ca şi configurarea rolului lor în doctrina pitagoreică ca o concepție despre lume. Astfel. un singur *pebble* ca un punct este *unu*, *doi* este făcut din doi *pebbles* sau două puncte, iar aceste două puncte fac o linie. Trei puncte, precum vârfurile, colțurile unui triunghi creează un plan, sau o suprafață şi, în fine, patru puncte pot reprezenta un solid. Faptul descris a sugerat lui Pythagora ideea corelației dintre numere şi mărimi, (eventual, configurații geometrice: segmente, suprafețe, triunghiuri, cuburi) între aspecte rămânând semnificativă teorema care-i poartă numele: pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi (catete) ale unui triunghi dreptunghic.

În virtutea relației dintre numere şi mărimi, pitagoreii puteau spune, deci, că numerele înseamnă anumite figuri: triunghi, pătrat, dreptunghi, cub, piramidă etc. Numerele triunghiulare, numerele pătrate, numerele dreptunghice, numerele cubice, numerele piramidale, numerele sferice etc., erau diferențiate de pitagorei ca fiind impare şi pare, în fapt un nou mod de abordare a *fenomenului conflictului opuşilor*. În toate aceste forme numerele sunt mai mult decât abstracții, ele sunt feluri specifice de entități: „A spune ca pitagoreii că toate lucrurile sunt numere, înțelegem că există o bază numerică pentru toate lucrurile care posedă configurație şi mărime (dimensiune); astfel, vedem mediațiile raționamenului pitagoreic: ei trec de la aritmetică la geometrie şi prin intermediul acesteia la studiul structurii realității. Toate lucrurile posedă

numere, şi valorile lor par şi impar explică opoziţiile în lucruri ca unu şi multiplu, pătrat şi oblong, drept şi curb, chiar lumină şi întuneric, sunt opoziţii numerice ca şi masculin şi feminin, bun şi rău" (S. E. Stumpf [1, p. 11]).

Pitagoreii îi depăşesc pe milesieni prin conceptul de *formă*, contribuţia lor importantă în filosofie şi care va fi preluată de Platon. Milesienii s-au oprit la ideea de *materie primară*, precum apa, aerul, apeironul etc., din care este constituit orice lucru. Pitagoreii înţeleg *forma* ca *limită*, iar aceasta este accesibilă înţelegerii noastre în termeni numerici. Muzica şi medicina ilustrează cele mai relevante domenii ale formei, graţie armoniei, care rezidă în proporţii şi limite. Prin intermediul formei – ca armonie muzicală sau/şi sănătate – numerele „cuceresc" regiuni ale existentului al căror specific nu-l mai reprezintă *cantitativul*, oricum esenţial relevant pentru număr, ci *calitativul*, care îşi anexează fenomene-abstracţiuni.

Aserţiunea centrală a doctrinei care rezumă conţinutul pitagoreismului, şi deci al *matematismului pitagoreic*, „*toate lucrurile sunt numere*" sau, poate, într-o formă mai slabă: „*toate lucrurile posedă numere*", a vizat întregul univers, astronomia aducându-şi propria-şi contribuţie la fundarea unui asemenea enunţ. Într-adevăr, acest gen de cercetări astronomice, stabileau cu privire la tabloul constelaţiilor două caracteristici: numărul aştrilor constituienţi şi figura geometrică pe care aceştia o desenează pe cer. Acestea au statutul unor date imuabile şi obiective şi asociaţia dintre ele ne relevă necesitatea naturală, ce poate servi ca bază a unei *concepţii generale despre univers*. Constelaţiile au un număr care le este propriu, toate lucrurile au un număr, care este condiţia cunoaşterii esenţei lor.

Investigaţia ajunsă în acest stadiu se confruntă cu o problemă legitimă: Cum este posibilă o geneză constitutiv numerică, dacă numărul este un concept iar lucrurile sunt obiecte sau substanţe? L. Brunshvicg [1, p. 34–35] propune o explicaţie, respectând spiritul concepţiei pitagoreice, care inversează demersul natural. El spune aproape textual: în loc de a cerceta transformarea unei noţiuni abstracte – *numărul* – într-o

realitate concretă – *lucrurile* – ar fi mai convenabil de a priva (destitui) noțiunea de număr de semnificația abstractă pe care suntem obișnuiți să i-o atribuim şi de a-l reintegra printr-un fel de aplicație intuitivă în statutul de „*inseparabil lucrurilor*"; astfel încât să vedem un punct atunci când se vorbeşte de o unitate, iar atunci când se vorbeşte de un număr să vedem o grupă de puncte care desenează figura, aşa cum stelele desenează o constelație. Pe scurt, conchide L. Brunschvicg, înainte de a spune că *lucrurile sunt numere, pitagoreii au început prin a concepe numerele* ca *lucruri*, iar expresiile „*numere pătrate*" sau „*numere triunghiulare*" nu sunt simple metafore, căci ele sunt, grație „*aritmeticii geometrice*" pitagoreice, efectiv în fața ochilor şi a spiritului nostru. Intuiția pitagoreică, poate pe nedrept considerată aritmetică, era mai curând una „*integrală*" şi oferea, într-o interpretare carteziană, un obiect care era totodată al imaginației şi al intelectului. Cele două elemente, *idee algebrică* şi *obiect întins*, reunite în sinteza originală datorată geometriei analitice, au fost date în conexiunea lor naturală, poate naivă la pitagorei, cu ajutorul intuiției aritmetico-geometrice integrală despărțite ulterior până la naşterea geometriei analitice. Numărul este prezentat conform acestei intuiții pitagoreice ca o sumă de puncte, figuri în spațiu, iar figurile – linii, suprafețe sau volume trasate prin aceste puncte – sunt date ca numere.

2.5. GENEZA ŞI NATURA NUMĂRULUI ŞI FUNCȚIA LUI „DEMIURGICĂ"

În Diogene Laert [1] (apud*) putem citi următoarele: „Principiul tuturor lucrurilor este unitatea, iar din această unitate provine doimea nedefinită servind ca suport material unității care este cauza. Din unitate şi din doimea nedefinită se trag numerele, din numere punctele, din puncte liniile, din linii figurile plane, din figurile plane, figurile solide, corpurile solide ale căror elemente sunt patru la număr: focul, apa, aerul şi pământul. Acestea se transformă şi trec pe rând prin toate lucrurile. Astfel,

se naşte din ele Universul (Kosmos) însufleţit, înzestrat cu raţiune, sferic şi cuprinzând la mijloc pământul...".

Acest text cu relevanţă specială pentru *filosofia pitagoreică a numărului* i-a prilejuit lui A. Fraenkian [1] (apud*) construcţia unei scheme despre *unu*, mai bine zis *Unitate, dualitate* şi *cosmogeneză* al cărei esenţial constă în câteva aserţiuni. Unitatea este principiul. Doimea ca o tendinţă spre infinit şi *matrice a divizibilităţii* este substitut al materiei, idee prezentă şi în dialogurile de maturitate ale lui Platon [2], [4]. Unitatea prin intermediul doimei (jumătăţii) generează numărul. Linia se naşte prin flexiune din punct. Liniile decupează spaţiul cu figuri plane sau suprafeţe şi ca volume – proiecţiile spaţiale numite figuri sau corpuri „*solide*". Şi acum iată schema lui A. Fraenkian:

Unitate ~ ↓ ~ doimea nedefinită
Numărul
↓
Punctul
↓
Linia
↓
Suprafaţa plană
↓
Solidul (volumul)
↓
Corpuri sensibile (cele 4 elemente)
↓
Universul

Şi acum iată un comentariu care surprinde spiritul matematicii şi filosofiei greceşti, dar care credem că este adecvat şi pentru concepţia pitagoreică: „Însăşi noţiunea de număr nu mai este generată prin abstracţie pornind de la contemplarea unor colecţii de obiecte din lumea exterioară a sensibilităţii empirice, pentru că spiritul devine conştient de faptul că universul de numere este dotat cu o lege interioară de geneză reproductivă: construirea oricărui număr N prin recurenţă, pornind de la

«1» *Unitatea nu este un număr*, ci strămoşul absolut, principiul tuturor numerelor: el generează toate celelalte numere prin copulaţie cu sine însuşi, el însuşi însă este negenerat. Operaţia de recurenţă este pur *noetică*, deoarece numai gândirea poate obţine mereu un număr dintr-un alt număr, adăugându-i acestuia unitatea; în lumea exterioară această operaţie are o limită superioară, deoarece la un moment dat se ajunge la un grup care conţine absolut toate obiectele existente. Numărul este astfel definit ca o mulţime arbitrară de unităţi. Nimic ce nu satisface această definiţie nu poate fi numit număr, decât prin abuz. Întreaga filosofie şi întreaga aritmetică ştiinţifică elină sunt dominate de ideea că «unitatea nu este un număr». Ea este principiul din care este alcătuit numărul" (I. Toth [1, p. 247]).

Aşadar, numărul este o mulţime de unităţi, unitatea nefiind o mulţime de unităţi nu satisface exigenţa stipulată în definiţia numărului. Prin această proprietate se „instalează" o opoziţie între unitate şi celelalte numere. Aritmetica greacă a avut la bază această teză: unitatea nu este un număr; ea nu este o mulţime; unitatea nu are părţi sau elemente, unitatea este indivizibilă. „Dacă unitatea în sine, unitatea abstractă ar fi divizibilă, de exemplu în N părţi egale, atunci ea ar fi compusă din N părţi; o parte, a N-a parte, fiind N*, am avea N N* = 1. Este evident, teza indivizibilităţii unităţii abstracte din aritmetica şi filosofia elină exprimă conştiinţa existenţei unei legi de conservare a universului numeric, exprimată printr-o teoremă de imposibilitate" (I. Toth [1, p. 248]).

După Aristotel [2], pitagoreii consideră că Unitatea constă din amândouă (pereche şi nepereche) şi că numărul provine din unitate. Acest text este comentat de D. Bădărău [1] în termenii următori:„ pentru filosofii greci unitatea nu este un număr, numai multiplul este număr, astfel că primul număr este 2, fiind cel mai dintâi număr pereche, iar primul număr nepereche este 3. Numerele provin toate din unul care este totodată pereche şi nepereche". D. Bădărău insistă în comentariul său asupra diferenţei dintre dublu şi doi, căci 6 este dublul lui 3 dar nu este 2. În concepţia pitagoreilor infinitul participă la limitat (sau Unul), iar această *participare*, principiu al lumii, este ceea ce se numeşte *Dyada* infinitului

şi a unității. Termenul Dyada desemnează altceva decât dublul, deşi dublul ca orice număr este o Dyadă, fiind joncțiunea multiplului cu unitatea, multiplul având ilimitatul ca esență. Pe de altă parte, dacă dublul ar fi identic cu Dyada acesta ar fi un multiplu şi unitatea ar fi identică cu dualitatea. Dualitatea indefinită şi duplicativă este în concepția lui Platon, principiul material opus Unului. Cuplul Unului şi al dualității (diadei) este o reminiscență la Platon care îşi are originea în filosofia pitagoreică, unde *Numărul*, «esență a lucrurilor», devine un principiu de explicare a lumii, dar numai dacă îl completăm cu noțiunea de infinit, care la rândul ei nu este nimic fără participarea unității. De aici derivă diada unității şi a infinitului la pitagorei, căci aceştia susțin, spune Aristotel [2, p. 414], „că Unul e principiu, substanță şi element al tuturor lucrurilor, considerând numărul ca provenind din această Unitate primordială şi dintr-un al doilea element indefinit (Diada indefinită)".

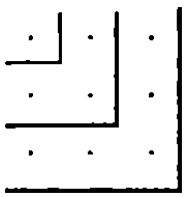
Spre deosebire de alți filosofi (platonicienii) pitagoreii nu admit mai multe feluri de numere: *numere ideale* (formate din unități neadiționale sau adiționale numai în cadrul acestor entități, gen diada, triada etc.), *numerele matematice* (ale căror Unități sunt adiționale). Pitagoreii admit numai *numărul matematic*, care, conform sistemului lor de gândire, nu este separat de lucrurile sensibile, ci le este inerent, fiind chiar substanța lor. Spre deosebire de această reprezentare concretă, promovată de pitagoreism, Aristotel consideră că ambele tipuri de numere există în afara sensibilului. O concepție – fază intermediară între *pitagoreism* şi *concepția aristotelică* – ar reprezenta unii platonicieni care descriu numărul matematic ca o realitate foarte abstractă, „existând ca primă ființă separat de lucrurile materiale". Pitagoreii au susținut că numerele matematice, singurul fel de numere admis, sunt inerente lucrurilor materiale, imanente lucrurilor sensibile, alcătuind ființa lor. Iată textul integral din „*Metafizica*" lui Aristorel [2, p. 415] cu privire la concepția pitagoreică despre numere: „Iar pitagoreii susțin că singurul număr este cel matematic, numai că în doctrina lor nu este separat de lucruri, ci substanțele sensibile sunt alcătuite din acestea. Construiesc Universul întreg din numere – dar nu din unități (monades) abstracte –

căci aşa cum presupun ei, unităţile au întindere (mărime spaţială). Pe cât se pare nu găsesc o ieşire pentru a explica în ce fel s-a alcătuit Unul primordial înzestrat cu mărime. Alt gînditor susţine că numărul primordial ar fi Unul ideal, iar alţii că numărul ideal este identic cu cel matematic. Tot aşa de împărţite sunt şi părerile privitoate la lungimi, suprafeţe şi figuri solide. Unii socot mărimile matematice ca fiind deosebite de cele care vin după idei. Dintre cei care susţin astfel de teorii, unii recunosc mărimile matematice, dar considerate numai sub raport matematic. Aşa procedează cei care fac din numere Idei şi, de altfel, nici nu admit existenţa ideilor. Alţii admit mărimile matematice, dar nu le iau în sens matematic. Căci după ei nu orice mărime se divide în mărimi şi nu orice fel de unităţi pot fi o dualitate (dyas). Aşadar, pleacă de la postulatul că numerele se alcătuiesc din unităţi toţi cei care afirmă că unul este element şi principiu al celor existente, în afară de pitagorei, care după cum spuneam înainte, atribuie numerelor mărime".

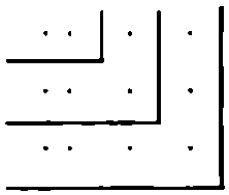
În text se menţionează că numerele sunt alcătuite din monades (unităţi) şi că Unul este element şi principiu al celor existente. Unii autori, ca de exemplu Raven, înclină să admită că vechiul pitagoreism era „*dualist*". Pare plauzibilă şi ipoteza că acesta asuma mai curând o concepţie monistă (sau monadică, în sensul filosofiei leibniziene). În ipoteza corelaţiei dintre monadă şi dyadă, oricum, vechii pitagorei nu considerau unităţile noţiuni abstracte, desprinse de realitatea sensibilă, deoarece, afirmă Raven, aceşti filosofi „ca şi restul presocraticilor nu izbuteau să stabilească o delimitare între corporal şi incorporal" (apud. M. Nasta [1, p. 106]). Concluzia este că pitagoreii nu admiteau teza că numerele sunt alcătuite din unităţi abstracte – monades. În text este vizată teoria platonicienilor despre *Unul primordial*; toţi filosofii care se deosebesc de pitagorei (deci şi platonicienii) stabilesc o echivalenţă între unu ca element primordial (hen) şi unitate (monas) ca element constitutiv al numărului. După opinia lui Aristotel, deoarece unitatea pitagoreilor este înţeleasă ca o mărime nu poate fi un element constitutiv al numărului matematic şi nici al numărului ideal.

Aristotel menționează avantajele dar şi dificultățile poziției pitagoreice în problema originii şi naturii numerelor. Reamintim că doctrina pitagoreică postulează participarea *Infinitului* (*apeiron*) la *Finitul* reprezentat prin *Unitate* pentru obținerea „*principiului lumii*" (al Universului) numit *Diada infinitului şi a Unității*. Se observă că în acest caz Diada este identificată cu multiplul şi cu Infinitul şi astfel dobândeşte esența pluralității. Dificultatea apare în analiza dublului generat prin adiționarea unităților prin dublare, duplicare, căci noțiunea pitagoreică de dualitate (dyada) având esența pluralității (infinitului) nu poate fi analizată în termeni de unități. „Inevitabil se ajunge la un rezultat aberant, atunci când se discută această «doime» (unitatea simplă fiind conjugată cu alta infinită, de natura pluralității). Pe de altă parte, chiar altfel, proprietatea «dublului» constatată printr-o simplă inducție poate fi echivalată de-a dreptul cu numărul doi, întrucât trebuie precizată natura elementelor care află în această relație de «duplicare». Se pot număra două elemente cu totul inegale, suma lor nemaiavând în felul acesta nimic de-a face cu dublul. Ambiguitatea s-ar putea rezolva dacă se deosebesc trei concepte: dyada (1 + x), numărul 2(1 + 1) şi dublul (2x)" (M. Nasta [1, p. 101]).

Pitagoreii admit că numărul ca principiu constituie nu numai natura lucrurilor, ci îl identifică şi cu accidentele şi stările lucrurilor. Numerele sunt considerate modele pe care lucrurile le imită, analog ideilor lui Platon, care are în pitagoreici o evidentă sursă de inspirație. Elementele constitutive ale numărului sunt perechea şi neperechea, primul considerat infinit, al doilea finit. Procedeul grecilor de a reprezenta numerele prin puncte a fost absolutizat în reprezentările geometrice (gnomonii geometrici) ale pitagoreilor (gruparea numerelor în grupe de puncte). Numerele nepereche erau reprezentate cu ajutorul gnomonului geometric astfel:



iar numerele pereche erau reprezentate geometric astfel:



Aceste reprezentări geometrice sugerau următoarele aserțiuni: Suma numerelor nepereche ar fi finită; gnomonii care includ numere nepereche ne reprezintă un pătrat, iar acesta este o figură perfectă şi finită. Suma numerelor pereche este infinită, gnomonii incluzând numere perechi configurează un dreptunghi care este o figură imperfectă şi nedefinită. Unitatea după pitagorei constă din pereche şi nepereche, iar numărul provine din unitate; întregul univers este redus la numere.

Să reținem unele remarci critice ale lui Aristotel la adresa pitagoreismului. Dacă admitem că există numai numărul matematic, (singurul fel de numere acceptat de pitagorei), atunci principiul său nu va fi *unul*, căci în acest caz un astfel de Unul ar trebui să se deosebească de celelalte unități şi tot astfel Diada primă ar trebui să se deosebească de celelalte diade, fapt ce s-ar întâmpla cu toate numerele următoare. „Dacă punem Unul ca principiu, e neapărat mai logic să ne însuşim punctul de vedere al lui Platon asupra numerelor, afirmând că există o diadă primă şi o triadă primă şi că Numerele ideale nu se pot aduna între ele. Dar am arătat că, chiar dacă adoptăm această teorie, consecințele absurde care decurg din ea sunt multe" (Aristotel [2, p. 424]). Deşi Aristotel apreciază că dificultățile pitagoreismului sunt mai mici decît cele inerente platonismului, sau poziției susținute de Xenocrate, care identifică numărul ideal cu cel matematic, el remarcă drept semnificative următoarele: „Să concepi numărul ca fiind neseparat «de lucruri» suprimă multe din consecințele imposibile. Pe de altă parte, a considera corpurile compuse din numere, iar numărul acesta ca fiind matematic este ceva imposibil. Căci nu este adevărată afirmația că există mărimi spațiale indivizibile (atoma) şi chiar dacă s-ar întâlni cît mai multe mărimi de acest fel, măcar unitățile în mod cert nu au mărime. Cum ar fi atunci posibilă existența unei mărimi compuse din (elemente) indivizibile? Cel puțin numărul aritmetic luat ca atare implică unități abstracte".

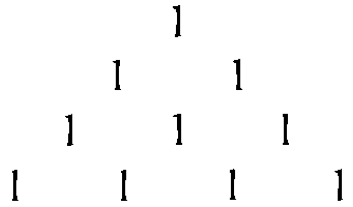
Concepțiile platoniciene postulau numerele ideale şi numerele matematice ca separate de lucruri, de realitatea sensibilă, în timp ce numerele pitagoreice fiind „concret-spațiale" şi deci într-un sens „*materiale*", căci pentru pitagorei numerele înseamnă lucruri cu existență reală; ei numesc număr cele existente ori realitatea ontică este cea materială. Ori, unitățile din text sunt monadele în accepția grecilor vechi, şi de aceea numărul format din unități abstracte este numit *arithmos monadikos*. Deoarece unitățile sunt concepute ca unități abstracte, nu pot fi considerate mărimi elementare.

Raven consideră ca semnificativă definiția dată în „*Metafizica*" lui Aristotel, conform căreia numerele funcționează ca materia din lucruri. O astfel de definiție sugerează interpretarea potrivit căreia Universul alcătuit din numere semnifică fapul că obiectele din natură sunt alcătuite prin «*agregarea unităților-puncte de tipul atomilor*». Identificăm din această perspectivă o concepție despre „*materialitatea*" ipostazei primordiale a numărului; devine inteligibilă teoria despre numerele constitutive ale stihiilor Universului: corpul întreg are numărul 210, focul are numărul 11, aerul are numărul 13, iar apa numărul 9.

Coerent cu această viziune Ekphantos, reprezentant al pitagoreismului mediu (secolul al IV-lea), va susține că principiile lucrurilor sunt corpurile indivizibile şi vidul. Ekphantos este primul pitagoreu care a vorbit despre natura corporală a unităților pitagoreice, încât Raven [1] a spus despre el că a elaborat o teorie «*corporal-atomistă*» despre numerele-unități. Nu se ştie sigur dacă până la Ekphantos unitățile se mai numeau şi corpuri. Şi, oricum, Aristotel nu admitea unități atomare sau corporale; chiar numerele compuse din mai multe unități erau pentru Stagirit simple abstracții, fără mărime sau greutate, adică fără proprietăți fizice ale corpurilor.

Cercetătorii doctrinei pitagoreice a numărului susțin că *decada* este natura numărului, dar virtualitatea (*dynamis*) numărului se găseşte în numărul patru şi în tetradă. Pornind de la unitate şi punând pe rând toate numerele până la patru şi apoi însumându-le obținem numărul zece (unități); prin depăşirea tetradei se trece dincolo de numărul zece.

Explicit, decada este considerată un ansamblu rezultat din tetraktys sau cvaternar, adică din suma primelor patru numere (1 + 2 + 3 + 4 = 10), care reprezintă în acelaşi timp al patrulea număr triunghiular, dacă privim orânduirea, dispunerea unităţilor sub forma figurii regulate:



Componenţii *tetraktys*-ului se caracterizează prin proprietăţi remarcabile: 1 reprezintă unitatea; 2 este primul număr par; 3 este primul număr impar; iar 4 este primul pătrat perfect.

Iar decada sintetizează aceste proprietăţi şi proporţiile numerelor incluse în conţinutul ei, raporturile care se pot stabili între ele pentru a genera pe de o parte figurile geometrice şi armoniile sunetelor, pe de altă parte, seria numerelor naturale, ambele concepte fiind corelate în cadrul numerelor figurate (cf. M. Nasta [1, p. 108).

Poate că asemenea *virtuţi demiurgice* ale *tetraktys*-ului, care constituie însăşi forma decadei, i-au determinat pe matematicienii şi filosofii greci (îndeosebi pe cei aparţinând tradiţiei pitagoreice) să-l numească *număr pur* sau *divin* şi *simbolul universului*. Poate din această cauză pitagoreii invocau tetrada ca fiind cel mai mare jurământ: tetrakys-ul, număr ce cuprinde izvorul şi rădăcina veşnic curgătoarei naturi.

2.6. PLATON, PITAGOREISM ŞI ATOMISM

Popper [1] susţine că doctrina centrală a lui Platon, cunoscută sub numele de „*teorie a formelor*" sau „*teorie a ideilor*" îşi are sorgintea în contextul situaţiei problematice, critice a ştiinţei din Grecia antică, adică într-un context extra-filosofic.

În afara acestei situaţii problematice a ştiinţei, la care vom face referiri, particularitatea şi influenţa platonismului în istoria culturii umane, în special a ştiinţei şi filosofiei, nu pot fi înţelese.

„Teoria formelor" a lui Platon, tintim conectată concepțiilor lui Pitagora şi Democrit, acestea ele însele implicate în amintita situație critică, „*criză*" *a ştiinței antice greceşti*, îşi are rădăcina în vulnerabilitatea acestor doctrine filosofice vis-à-vis de fenomenul dramatic al ştiinței provocat de „*irațională*".

A fost meritul filosofiei platoniciene de a fi conştientizat acest remarcabil fenomen şi de a fi înțeles în contextul de avanscenă ce îi revenea geometriei comparativ cu aritmetica, la aceasta din urmă fiind prea ataşate doctrinele pitagoreică şi atomistă.

„*Emanciparea* geometriei", la care platonismul a contribuit enorm, se va cristaliza" în final la forma sistemului lui Euclid din „*Elementele*" sale, cea mai importantă, prima şi cea mai influentă teorie deductivă, axiomatică pe care omul a construit-o vreodată.

Geometria va deveni de acum înainte o „componentă-cadru" a teoriei noastre asupra lumii, facilitând progresele realizate de Aristarh, Newton sau Einstein, şi va influența, în calitatea ei de teorie geometrică a lumii, construcția marilor „*Weltbild*-uri", tablouri ştiințifice fizice asupra universului.

Eşecul pitagoreismului, atomismului s-a convertit, pe această cale, într-o mare realizare intelectuală de ținută istorică, dar, conchide Popper [1], situația problematică care a dat naştere unei filosofii *profunde* a fost uitată, iar problemele filosofice n-au fost din acest motiv înțelese decît superficial.

Spuneam mai la început că teoria platoniciană a formelor este intim conectată de teoria pitagoriciană, atât prin origine cât şi prin conținut, aceasta din urmă avînd ca *nucleu doctrinar* teza că „*toate lucrurile sunt în esență numere*". Pitagora a făcut această generalizare – toate lucrurile sunt în esență numere sau raporturi, proporții numerice – impresionat fiind de două mari descoperiri: prima este în legătură cu un fenomen *calitativ, armonia*, care e bazată pe raporturi (ratios) pure ca 1 : 2; 2 : 3; 3 : 4; a doua se referă la unghiul drept obținut prin îndoirea, împăturirea de două ori a hârtiei, astfel că cele două cute formează o diagonală care, de asemenea, este legată de raporturi numerice: 3 : 4 : 5 sau 5 : 12 : 13 care reprezintă laturile triunghiului dreptunghic. Ideea s-a dovedit

fructuoasă, remarca K. R. Popper [1], privind diferite figuri geometrice pătrate, triunghiuri dreptunghice şi isoscele, solide simple ca piramide, tratarea problemelor respective fiind bazată pe „*gnomon*".

Cu ajutorul diagramelor punctuale pitagoreice înţelegem ce este un gnomon, dar şi cum se construiesc numeric diferitele figuri geometrice – pătrate, triunghiuri, dreptunghiuri, solide (în fapt, numere pătrate, triunghiuri, oblonge etc.). Dar nu numai formele sunt numere sau raporturi de numere, deci nu numai configuraţiile lucrurilor, ci şi proprietăţi abstracte ca armonia, justiţia, direcţia etc. Pe această cale pitagoreii au construit teoria lor generală, conform căreia numerele sunt „*esenţele raţionale*" ale tuturor lucrurilor.

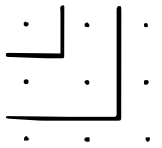
K. R. Popper face ipoteza că dezvoltarea concepţiei pitagoreiciene a fost influenţată de similaritatea diagramelor punctuale cu diagramele constelaţiilor ca Leu, Scorpion etc. „Dacă «Leu» este un aranjament de puncte, trebuie să aibă un număr. În acest mod pitagoreismul pare să fie conectat cu credinţa că numerele sau «formele», sunt configuraţii cereşti ale lucrurilor" (Popper [1, p. 78]).

Să vedem construcţia bazată pe gnomon, folosind diagramele punctuale, ale diferitelor figuri (configuraţii, forme) geometrice. În cele ce urmează reproducem această construcţie după K. R. Popper [1, p. 76]).

Un pătrat poate fi reprezentat prin patru puncte în felul următor:

această construcţie poate fi interpretată ca un rezultat al adăugirii a trei puncte la un punct din partea stângă de sus pe care îl marcăm astfel:

Cele trei puncte formează gnomonul. Putem adăuga un nou gnomon format acum din cinci sau mai multe puncte:

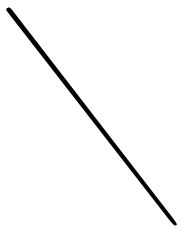


Fie şirul de numere impare: 1, 3, 5, 7,...; se constată uşor că fiecare dintre numerele şirului constituie un gnomon al unui pătrat şi că sumele: 1, 1+ 3 ; 1 + 3 + 5; 1 + 3 + 5 + 7;... sunt numere pătrate; iar dacă n este numărul punctelor de pe o latură a unui pătrat, atunci aria (suma tuturor punctelor) este n^2, egală cu suma primelor n numere pare.

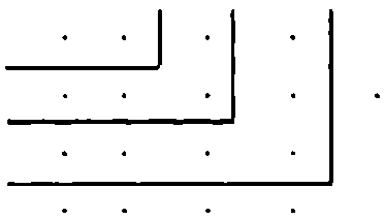
Abordarea în cazul triunghiurilor echilaterale este sugerată de un triunghi, care creşte în jos prin adăugarea a încă unei noi linii orizontale de puncte,

unde de data aceasta gnomonul este reprezentat de ultima linie orizontală, iar fiecare element al şirului 1, 2, 3, 4... este un gnomon. Numerele triunghiulare sunt numerele 1 + 2; 1 + 2 + 3; 1 + 2 + 3 + 4; etc., deci sume ale primelor n numere naturale.

Dacă aşezăm două asemenea triunghiuri latură lângă latură ca în diagrama următoare obţinem paralelogramul cu latura orizontală n + 1; iar cealaltă n şi care conţine n(1 + 1) puncte, fiind format din două triunghiuri isoscele:



„Numerele oblong" se obţin conform diagramei:



Deci numerele dreptunghice (al figurilor dreptunghiulare) au gnomon un număr par, ele fiind sume de numere pare: 2 + 4 + 6...;

considerațiile se extind şi la solide şi obținem numere cubice, piramidale etc. Teoria pitagoriciană veche conține un element interesant, straniu chiar, dar relevant pentru modul de gândire al autorilor şi adepților ei; este vorba de *tabelul opuşilor* şi care are la bază o distincție de ordin aritmetic: numere pare şi numere impare:

unu	multiplu
impar	par
masculin	feminin
existență	devenire
determinat	indeterminat
pătrat	oblong
restiliniu	curb
drept	stâng
lumină	întuneric
bun	rău

Lectura şi interpretarea tabloului ne arată că numere sunt nu numai figurile geometrice, ci şi ideile abstracte ca dreptate, armonie, sănătate, frumusețe, cunoaştere. Teoria timpurie platoniciană a ideilor preia acest tabel al opuşilor aproape nemodificat, şi consideră că latura „*bună*" a acestuia este relevantă pentru „un univers invizibil al unei realități mai înalte, al neschimbării şi formelor determinate ale tuturor lucrurilor... cunoaşterea adevărată şi certă (episteme = scientia = science) poate fi numai despre acest univers real şi etern" (Popper [1]), în timp ce „lumea vizibilă a schimbării şi fluxului în care noi trăim şi murim, lumea generării şi distrucției, lumea experienței este numai un fel de reflecție sau copie a acelei lumi reale, este numai o lume a aparenței" (Popper[1]). Acestei lumi îi este asociată cunaoşterea ca *doxa* (opinie), cunoştințe plauzibile, dar incerte, ale muritorilor supuşi greşelii.

Dar Platon va interpreta „*tabloul opuşilor*" prin prismă parmenidiană, o provocare care va conduce la doctrina atomistă.

Recunoaşterea influenței pitagoreismului asupra lui Platon nu trebuie să ducă la o „identitate" de viziuni ale celor doi gânditori greci

referitor la relația numere şi lucruri. Unii exegeți compară concepțiile lui Platon şi Pitagora cu ajutorul distincției: *imitație* şi *participare*. Pitagoreii afirmă „*lucrurile imită numere*", în timp ce platonicienii susțin teza că „*lucrurile participă la numere*". Aceste enunțuri par să concentreze „*nucleele*" celor două filosofii – pitagoreismul şi platonismul – ambele filosofii de tip matematic. *Imitația* presupune separarea originalului şi copiei; ceea ce în context platonician semnifica faptul că ideile platonicien sunt „paradigme", „modele", iar lucrurile sensibile, perceptibile sun imitații, (Platon [2] este suficient de explicit asupra acestui aspect.) În context pitagorician, semnificația este radical schimbată, diferența de nivele (ontologice) de realitate, prezentă în platonism, este aici „*dizolvată*", căci enunțul „lucrurile imită numere" sugerează că pitagoreii pun pe acelaşi plan realitatea numerică şi realitatea naturală, de fapt o asemănare între mulțimea numărului şi mulțimea lucrului. Să mai observăm că după M. Jackon [1] trebuie făcută o distincție radicală între Platon [6] [7] (teoria participării la idei) şi dialogurile lui Platon [5], [4], [10], unde ideile sunt înlocuite cu tipuri naturale; şi să adăugăm că noțiunea de „*participare*" preluată din vocabularul lui Anaxagoras are o semnificație, sens material, care ar trebui restituită pitagoreismului, în virtutea conținutului doctrinei, deşi, paradoxal, este „favorizată" de contexte de vorbire platoniciană.

Oricum, asemănările sau neasemănările verbale nu par să fie convingătoare, iar intervertirile termenilor în cauză „*imitație*" şi „*participare*" pot fi indezirabile şi chiar nejustificate. Opoziția profundă dintre *pitagoreism* şi *platonism* ar putea fi relevată prin termenii: „*imanență* pitagoriciană" şi „*transcendență* platoniciană", ceea ce semnifică (în primul caz) un acelaşi plan ontologic al lucrurilor şi numerelor, respectiv (în al doilea caz) o diferență, separare de nivele ontologice cu caracteristici distincte şi marcat opuse, ca în interpretarea platoniciană a tabloului pitagoreic al opuşilor. Urmându-l pe Platon, ştiința numerelor poartă nu asupra lucrurilor luate în sine, ci asupra caracterelor, determinaților acestora. În Platon [4] principiul acestor determinații este formulat explicit şi precis: „egalul şi egalitatea şi după

egal dublul şi tot ceea ce ar fi raportul numărului cu numărul şi al măsurii cu măsura". Ca etalon al măsurării (măsurii) şi numărării se aplică tipuri de determinare, tipuri ideale, luate în sine, realităţi autonome, ce se constituie ca un plan superior al adevărului sau existenţei la care procedează participarea: „Marele" şi „Micul" sunt asemenea tipuri.

Platon şi *platonismul* au rădăcini complexe în tradiţia filosofică şi ştiinţifică, iar *pitagoreismul* este numai una. O a doua este *teoria atomistă* a lui *Democrit*, la rândul ei influenţată de pitagoreism, cel puţin este neîndoielnic că acesta a sugerat, prefigurat un atomism foarte primitiv. Şcoala lui Democrit a suferit influenţe indubitabile ale şcolii eleate (Parmenide şi Zenon). Democrit a fost preocupat de obţinerea unei înţelegeri raţionale a schimbării, mişcării, o problemă derivată în mod cert din filosofia lui Heraclit, deci din gândirea ioniană mai curând decât din cea pitagoreică; această idee este vădit compatibilă cu *filosofia naturală*, sau a naturii, pe care o practicau gânditorii din Ionia.

Paradoxal este faptul că deşi Parmenide nu a fost „fizician" – desigur, în sensul antic al termenului atribuit preocupărilor presocraticilor din Ionia – el a fost considerat aproape un întemeietor al fizicii teoretice, edificând, cum remarca Aristotel, în spirit antifizical, primul sistem ipotetico-deductiv ce a inaugurat o lungă serie de sisteme ale teoriilor fizice, din ce în ce mai perfecţionate, urmare a conştientizării că sistemul mai vechi (din serie) a fost falsificat de fapte ale experienţei, consecinţele derivate din ipoteze fiind respinse empiric; ar mai fi aici de dezvoltat meritele lui Parmenide în planul metodologicei ştiinţei ca şi rezonanţa actuală a construcţiei sale teoretice, dacă avem în vedere că azi se consideră că natura ştiinţei contemporane este relevant „capturată" de noţiunea de sistem ipotetico-deductiv.

După parafrazarea dată de Popper [1, p. 80, 81] teoria (deductivă) a lu Parmenide conţin următoarele:

1) Numai ceea ce este, este.

2) Ceea ce nu este, nu există.

3) Non-existenţa (nefiinţa), adică vidul, nu există.

4) Lumea este plină.

5) Lumea (universul) nu are părți; ea este un bloc imens (deoarece este plină);

6) Mişcarea este imposibilă (deoarece nu există spațiu vid) în care ceva s-ar putea mişca;

5) şi 6) au fost falsificate de fapte şi Democrit a argumentat din falsitatea concluziei următoarele premise:

6′) Există mişcarea (astfel mişcarea este posibilă);

5′) Lumea are părți;

4′) Lumea nu poate fi plină.

Dar conclictul dintre teoria lui Parmenide şi observații a condus la apariția primei teorii fizice a materiei, teoria atomistă a lui Democrit. Problema centrală, am spune, în teoria lui Parmenide este cea a mişcării intim legată cu problema paradoxelor. El vedea o soluție a problemei paradoxelor în declararea mişcării ca aparență; din faptul că este imposibil să înțelegem în mod rațional mişcarea, Parmenide conchidea că nu există realmente schimbare, mişcare. Raționamentul lui Parmenide privind imposibilitatea mişcării este parafrazat de K. R. Popper [1, p. 80] astfel: „Dacă un lucru X se schimbă, atunci în mod clar nu mai este acelaşi lucru X. Pe de altă parte, nu putem spune că X se schimbă fără implicarea că X persistă în timpul schimbării, că este acelaşi lucru X, la începutul şi sfârşitul schimbării. Am ajuns la o contradicție şi că ideea unui lucru care se schimbă şi deci ideea schimbării este imposibilă". Ştim astăzi că Hegel, Marx şi Engels considerau filosofiile care neagă contradicțiile ca fiind *metafizice*, în timp ce ei vedeau contradicțiile ca omniprezente".

Să urmărim acum unele aspecte ale genezei atomismului la Democrit. În primul rând, *Vidul* (sau *non-.existența*) *există* (3′), o aserțiune fundamentală în doctrina atomistă se obține astfel: inferența din existența mişcării la cea a vidului nu este validă deoarece inferența lui Parmenide din cea a „plinului" lumii la imposibilitatea mişcării nu este validă.

În al doilea rând, cu privire la lucruri (ființa, existența), opuse vidului, Democrit a împărtăşit concepția lui Parmenide şi anume, că şi acesta, a afirmat că nu au părți, sunt indivizibile, neavând vidul înăuntru.

Teoria atomistă susține, deci, că lumea, este formată din *atomi* (universuri bloc indivizibile), care nu se schimbă, şi *vid*. Mişcarea poate fi explicată raţional în cadrul teoriei atomiste, ea este produsă de rearanjarea atomilor în spaţiu şi, deci, orice schimbare este mişcare. Deoarece noutatea ţine de acest aranjament, schimbările viitoare pot fi prezise.

Teoria lui Democrit a fost parţial acceptată de Platon, care a reţinut multe din doctrina atomistă, dar criticată de Aristotel, care concepea schimbarea, mişcarea, ca desfăşurare a potenţialităţilor inerente ale substanţelor (esenţial) neschimbătoare. „*Atomii*", un fel de „forme" care nu constituie subiect la nici o schimbare, contraveneau teoriei lui Aristotel a substanţelor ca subiecte ale schimbării; totuşi teoria lui Democrit, conform căreia orice schimbare trebuie să fie explicată prin mişcare, a fost admisă tacit ca program de lucru în fizică, cadrul teoretic al explicaţiei proprietăţilor materiei empiric cunoscute şi discutate de ionieni: compresibilitate, refracţie, condensare, coerenţă, dezintegrare. Dar a oferit nu numai o explicaţie a fenomenelor observate în experienţă ci şi un principiu metodologic, şi anume că o teorie deductivă, sau o explicaţie, trebuie „*să salveze fenomenele*", ceea ce semnifică un acord al ei cu experienţa. O altă raţiune profundă pentru care teoria lui Democrit trebuie apreciată este următoarea: „a arătat că o teorie poate fi speculativă şi bazată pe principiul fundamental parmenidian că lumea trebuie să fie înţeleasă prin gândire argumentativă, diferită de, *lumea prima facie*, a experienţei, văzută, auzită, pipăită etc., şi că o asemenea teorie speculativă poate accepta criteriul empirist, că «vizibilul» este cel care decide acceptatrea sau respingerea unei teorii a «invizibilului» (astfel ca atomii). Această filosofie a rămas fundamentală pentru întreaga dezvoltare a fizicii şi a continuat să intre în conflict cu tendinţele filosofice relativiste şi pozitiviste" (K. R. Popper [1, p. 82]).

Atomismul democritian s-a constituit în mare măsură ca un «*punct de vedere-replică*» la filosofia lui Parmenide şi Zenon, prin respingerea concluziilor acestuia din urmă.

Nu se ştie când descoperirea (şi demonstraţia) „*iraţionalităţii rădăcinii pătrate a lui doi* au fost cunoscute public, în consecinţă este

nesigur dacă Democrit a avut cunoştinţă de problema iraţionalelor, deoarece, altfel, ar fi trasat o strategie de apărare împotriva „*loviturii*" care venea din această direcţie şi care a marcat eşecul pitagoreismului. Cum ştim, ambele doctrine, pitagoreismul şi atomismul, s-au bazat pe ideea că orice măsurare este calculare, numărare, socotire cu unităţi naturale, deci, orice măsurare trebuie să fie reductibilă la numere pure; distanţa dintre orice două puncte atomare trebuie să fie comensurabilă, ori se întâmplă să avem incomensurabilitate în cazuri simple, ca cele dintre colţurile unui pătrat, din cauza incomensurabilităţii diagonalei d cu latura a.

Incomensurabilitatea semnifică nonexistenţa raportului de numere naturale, dar nu semnifică incomensurabilitatea prin metode geometrice sau prin măsurare, ci doar incomparabilitate prin metode aritmetice de numărare (calcul) sau prin numere naturale, inclusiv metoda pitagoreică a comparării rapoartelor numerelor naturale. Pitagoricienii au iniţiat măsura ştiinţifică numerică; era mai curând „counting" decât „measuring" pentru pitagoricieni.

Descoperirea „*incomensurabilităţii*", „*iraţionalităţii*" a subminat credinţa ordinului pitagoreic, a distrus speranţa *derivării cosmologiei* şi chiar a *geometriei* din *aritmetica numerelor naturale*, constată Popper [1].

Platon, spune Popper [1], a fost aproape de şcoala eleată, şi deci antipatic faţă de Democrit, dar, paradoxal, era un fel de atomist. Contribuţia lui Platon la dezvoltarea ştiinţei vine, afirma Popper, din conştientizarea „*problemei iraţionalelor*" şi din modificarea pitagoreismului şi atomismului cu scopul de «*a salva ştiinţa*» de la situaţia catastrofală. În acest sens se poate spune că Platon „a conştientizat epistemologic" că „*teoria pur aritmetică a naturii*" a eşuat şi că se impune o nouă metodă matematică în descrierea şi explicarea naturii, *metodă geometrică* autonomă, care îşi va găsi „împlinirea ei în «*Elementele*» lui Euclid platonicianul" (K. R. Popper [1, p. 87]).

Nucleul filosofic al platonismului este impregnat de o înaltă încărcătură ştiinţifică, a cărei rădăcină se aşează în situaţia problematică, de criză, a ştiinţei antichităţii greceşti. Platon a preluat o idee de sorginte teologică, şi anume ideea explicării lumii reale „*vizibile*", adică sensibilă, perceptibilă printr-o lume „invizibilă", adică inteligibilă postulată şi a

transformat-o printr-un instrument al ştiinţei teoretice; ideea se regăseşte, remarcă Popper [1], ca principiu de investigare a naturii materiei la Democrit şi Anaxagoras, sub formă de ipoteze despre structura invizibilă a lumii. Meritul lui Platon este acceptarea conştientă a acestei idei şi generalizarea ei, în fapt, lumea lucrurilor sensibile, „vizibilă" şi în schimbare este explicată, în ultima analiză, printr-o lumea „invizibilă", inteligibilă a formelor neschimbătoare, eterne („esenţe", „*substanţe*", „naturi", adică configuraţii sau figuri geometrice).

Şi Popper [1] se întreabă dacă ideea despre structura invizibilă a materiei este o idee fizică (fizicală?) sau filosofică. Dacă cineva confruntat cu ea produce o nouă teorie specifică asupra structurii materiei, atunci el nu este un filosof; dar dacă o respinge, atunci când meditează asupra statutului ei ca Berkeley sau Mach, care preferă o „fizică fenomenologică" sau pozitivistă abordării teoretice şi, oarecum, teologice în cauză, atunci el este un filosof.

Această teorie platoniciană poate fi găsită în Platon [2] şi are, după K. R. Popper [1], o similaritate superficială cu teoria modernă a solidelor, interpretate ca cristale, ideea acesteia fiind că particulele elementare de diferite configuraţii sunt „răspunzătoare" de proprietăţile nacroscopice ale materiei „vizibile"; „aceste configuraţii sunt alcătuite din figuri, plane, care la rândul lor sunt formate din două triunghiuri elementare: isoscel rectangular, care incorporează *rădăcina pătrată a lui doi* şi triunghi rectangular jumătate echilateral (half-equilateral rectangular triangle), care încorporează rădăcina pătrată a lui trei, ambele alcătuite din iraţionali". Este o întrebare autentică şi relevantă pentru sacrificiul filosofiei matematice a lui Platon de ce el a ales aceste triunghiuri. Pentru că toate celelalte iraţioanale pot fi obţinute adăugând la raţionali multipli ai rădăcinilor pătrate ale lui doi şi trei; el, Platon, a asumat cele două triunghiuri ca principii, Euclid a arătat greşeala lui Platon referitor la derivarea tuturor triunghiurilor din acestea două, o concepţie care este echivalentă cu teoria greşită a comensurabilităţii relative a tuturor iraţionalelor cu sume de raţionale şi rădăcini pătrate ale lui doi şi trei.

Prin alegerea triunghiurilor respective se spune că Platon a introdus „*raționalele*" în lumea formelor, motiv pentru care Aristotel a văzut teoria platoniciană a formelor ca fiind aceeaşi ca teoria pitagoriciană a „numerelor-forme", iar atomismul platonician ca „o variație minoră a celui democritian" (K. R. Popper [1]).

După Popper [1], Aristotel, deşi a admis asocierea aritmeticii cu „impar şi par" şi a geometriei cu „irațională" nu a luat problema în serios, dar a luat ca gata admis programul lui Platon pentru o „*reformă*" a matematicii în favoarea geometriei.

«*Programul-reformă*» *platonician* pentru (sau în favoarea) geometriei poate fi schițat ca bazat pe următoarele fapte remarcabile, sistematizate de K. R. Popper [1]:

1) Aritmetica era subiacentă pitagoreismului şi atomismului lui Democrit.

2) Platon conştientizează „criza" ştiinței (în special a matematicii) greceşti generată de descoperirea iraționalelor.

3) Geometria (după Aristotel şi Euclid) tratează tipic despre „incomensurabile" sau „iraționale", spre deosebire de aceasta, aritmetica tratează despre „impar şi par", astfel spus, despre întregi şi relațiile lor.

4) „*Elementele*" lui Euclid propun o matematică liberă de asumpția „aritmetică" (a comensurabilității şi raționalității).

5) Contribuția lui Platon la dezvoltarea geometriei este marcată, epistemologic, dar şi practic; însă contribuția lui este efectivă în „*geometria solidelor*".

6) Versiunea geometrico-platoniciană din *Timaios*" a teoriei atomiste care anterior era pur aritmetică se modifică (este vorba de corpurile platoniciene din triunghiuri care au încorporat, cum deja am văzut, rădăcini pătrate iraționale ale lui doi şi trei). A păstrat idei pitagoreice dar şi atomiste; a vrut să renunțe la vid, de care n-a avut nevoie în problema mişcării (într-o „*lume plină*" paramenidiană); mişcarea circulară este posibilă, cu condiția ca să existe un mediu – quasi lichid – baza cartezianismului şi a teoriei eterului; şi deşi a fost şi paramenidian a fost obligat să rețină şi vidul în cazul particulelor

elementare, altele decât cubul şi piramida, care au spaţiu între ele atunci când sunt împachetate.

2.7. PROBLEMA EXISTENŢEI MATEMATICE ÎN ONTOLOGIA PLATONICIANĂ

Ontologia platoniciană a fost centrată pe distincţia aparenţă-realitate (sensibil-inteligibil), importantă în orice activitate intelectuală, ce vizează realizarea unei ordini teoretice sau practice în lumea aparenţelor supusă fluxului schimbării. Platon a îndemnat la identificarea şi cunoaşterea realităţii, ca un referenţial în dominarea lumii aparente înconjurătoare. Sus-menţionata distincţie i s-a părut relevantă filosofului în studiul matematicii pure şi aplicate, o investigaţie care o luminează retroactiv.

Problema existenţei matematice a fost evidenţiată de unii interpreţi ai marelui filosof grec în legătură cu ceea ce s-a numit o „a treia structură a sistemului", o schemă conceptuală sugerată de unele texte aristotelice. Instituirea numerelor matematice şi a figurilor geometrice, ca un „*oficiu*" *de intermediar* între sfera inteligibilului şi sfera sensibilului, a dublat lumea inteligibilului, căci dincolo de *Ideile* ca *esenţe* generatoare ale diversităţii calitative a lumii apar *numerele ideale* (1–10) şi *figurile geometrice ideale* (punctul, linia, suprafaţa, volumul) ce ar asigura o *fundare aritmetico-geometrică* pentru determinaţiile cantitative ale universului.

Admiţând drept cunoscută teoria platoniciană a formelor (ideilor), entităţi absolut reale, concepute ca independente de percepţie, susceptibile de a fi definite, descrise exact şi ca fiind permanente, adică atemporale, eterne, teorie care identifică, deci, realitatea (autentică) ca şi criteriile cărora aceasta se conformează, vom cita un fragment, din păcate prea lung din Proclos [1] (*apud.* O. Becker [1, p. 146–147]). Proclos [1] scrie textual despre existenţa matematică în viziunea platoniciană, argumentând în favoarea aserţiunii anterioare despre rolul

„*intermediar*" al formelor matematice în ansamblul genurilor de existență, postulate de această concepție: „Existența matematică nu aparține, din punct de vedere al necesității, nici celor mai înalte genuri de existență, nici celor mai joase genuri care sunt supuse împărțirii, în opoziție cu existența simplă. Dimpotrivă, *existența matematică ocupă locul de mijloc* (s.n. M.Ț.) între entitățile nedivizate, simple, necompuse şi neseparabile, pe de o parte, şi entitățile divizate, caracterizate prin compoziții variate şi multiple separări. Caracterul de invariabilitate, permanență şi irefutabilite a propozițiilor, care se ocupă de ea dovedeşte superioritatea sa față de genurile de existență materială; dar discursivitatea metodelor sale de cunoaştere, utilizarea obiectelor exensive de cercetare şi trecerea progresivă de la supoziții din ce în ce mai noi la consecințe tot mereu mai noi, toate acestea îi asigură ei un rol mai mic decât i se acordă lumii existențiale nedivizate şi perfect fundamentale în sine însăşi. De aceea, eu cred că şi Platon a distribuit speciile de cunoaştere a existentului la entități superioare, intermediare şi inferioare. El atribuia specia intelectuală lumii nedivizatului; specia intelectuală de cunoaştere distinge dintr-o privire în chip simplu inteligibilul şi depăşeşte celelalte moduri de cunoaştere prin caracterul său imaterial şi pur, ca şi prin faptul că îşi însuşeşte prin intuiție obiectele existenței. Lumii divizatului, care are cel mai coborât grad de existență şi aparține în întregime domeniului simțurilor, el îi atribuie *opinia* care prinde numai o rază slabă a adevărului. În sfârşit, *lumii de mijloc* (s.n. M. Ț.), deci genurilor existenței matematice, care nu posedă esență nedivizibilă şi sunt superioare lumii divizibile, Platon îi atribuie gândirea mediantă (discursivă)... După cum genurile de cunoaştere se deosebesc între ele, tot astfel se deosebesc prin natura lor şi obiectele cunoaşterii şi anume lumea inteligibilă depăşeşte pe toate celelalte prin imuabilitatea substanțelor sale, lumea simțurilor rămâne însă, în toate, în urma existenței celei mai înalte. Obiectele matematice fiind până la urmă şi în genere obiectele gândirii mediante îşi susțin situația lor *intermediară* (s.n. M. Ț.). Față de cele ce sunt inteligibile, datorită separării lor unele de altele, sunt superioare din punct de vedere numeric: față de lumea simțurilor, ele au avantajul

imaterialității. Față de primele, sunt inferioare din punctul de vedere al simplității, față de celelalte, sunt superioare prin exactitatea lor şi prin faptul că oferă imagini mai clare ale existentului inteligibil decât lucrurile sensibile... Pentru a conchide spunem că obiectele matematice sunt expuse în anticamera formelor existențiale cele mai înalte şi dezvăluie existența unitară, nedivizată şi creatoare a acelor forme...".

Succint, reamintim că numai *formele, esențele, ideile* (eidos), termeni aproximativ interşanjabili în vocabularul platonician, se conformează criteriilor de realitate absolută; formele includ modele (arhetipuri ontologice) ale obiectelor fizice, dar şi stări ideale de lucruri pentru care oamenii merită să lupte, însă conexiuni cu filosofia matematicii au numai primele. Corelate formelor (mese ideale, scaune ideale, este vorba de forme corespunzătoare lucrurilor obişnuite perceptibile – „*locuitori*" ai lumii fizice, ai sferei *sensibilului*) sunt un gen de entități ce se conformează exigențelor de realitate, şi repetăm aici că *real* în accepție platoniciană înseamnă *forma*, precum numerele aritmeticii sau obiectele geometriei pure (punct, linie, suprafață, triunghiuri etc.). Dacă urmăm unii interpreți, ca Körner [1, p. 21], „în etapa finală a evoluției gîndirii sale, Platon admitea numai două tipuri de *forme*: cele *matematice* şi cele *morale*". Dar înainte de a ne angaja într-o discuție despre specificul, statutul şi limitele formelor matematice să conchidem că în viziunea filosofică platoniciană *aparența* este caracteristica lumii sensibile (a percepției senzoriale), iar lumea *formelor* – obiecte definite, atemporale, aspațiale, independente de spirit – constituie „*marca ontologică*" relevantă a *realului (realității),* referențial al oricărei activități intelectuale ce urmăreşte o ordine teoretică sau practică în vâltoarea aparențelor atît de derutante. (Leitmotivul platonician al distincției *real* şi *aparent* se explică, după Aristotel [2], prin aceea că Platon a fost influențat de considerațiile filosofice ale lui Heraclit despre adevăr vis-à-vis de reflecția acestuia din urmă că toate lucrurile se află într-o continuă curgere (*Pantha rei*). Şi Stagiritul desfăşoară raționamentul dacălului său – Platon – despre adevăr şi posibilitatea noetică a ştiinței astfel: „Dar dacă e vorba să existe o ştiință

şi o cunoaştere a vreunui lucru trebuie să existe în afara lucrurilor sensibile, alte realităţi permenente, căci nu poate exista o ştiinţă a lucrurilor ce sunt într-un veşnic flux".

Chiar dacă nu admitem opinia că în ultima fază a gândirii platoniciene *formele* sunt reduse la formele matematice şi forme morale, oricum, platonismul nu lasă dubii cu privire la teza că această *lume a formelor*, cognoscibilă nu prin simţuri, ci prin raţiune, conţine şi formele matematice, în principal acestea fiind de două tipuri: aritmetice şi geometrice şi care, în ansamblul lor, formează obiectul matematicii. Platon considera că există asemenea obiecte eterne independente de mintea umană ca „unu", „doi", „trei", „patru", „cinci"... numite forme aritmetice precum şi obiecte eterne, la fel independente de gândirea noastră, ca „punct", „linie", „triunghi", „cerc" etc., numite forme geometrice. Propoziţiile matematicii descriu aceste forme şi relaţiile dintre ele, ca în exemplele: „2 + 2 = 4"; „cea mai scurtă distanţă între două puncte este o linie dreaptă". Şi cum aceste forme au o multiplicitate de reprezentanţi, natura acestora a generat controverse şi discuţii. Körner [1, p. 21] scrie referitor la acest aspect: „S-a ridicat problema la ce anume se referă teoria lui Platon; de exemplu, se referă ea la dubla apariţie a lui a lui „doi" în enunţul «doi şi cu doi fac patru», sau la dubla apariţie a „liniei drepte" în: «două linii drepte care nu au toate punctele comune, au cel mult un punct comun»? Aceşti reprezentanţi ai lui «doi», adică aceşti numeroşi doi cu care oprează aritmeticianul, sunt entităţi separate şi ele trebuie să fie deosebite de *forma* binarităţii; sau trebuie să spunem că orice se afirmă în aparenţă despre numeroşi doi, se afirmă în fond despre *forma* unică? O situaţie cu totul asemănătoare, au şi reprezentanţii aparenţi ai «liniei». După Aristotel, (spre deosebire de toţi comentatorii ulteriori), Platon distingea: (a) *formele* aritmetice şi geometrice; şi (b) aşa-numitele entităţi matematice fiecare dintre ele fiind reprezentantul unei *forme* unice, fiecare formă având mai mulţi reprezentanţi de acest fel". Obiectivitatea şi adevărul propoziţiilor sau, altfel formulat, răspunsul la întrebarea ce este acel ceva, în caz că există, care face aceste propoziţii adevărate rezidă, după Platon, în considerarea acestora ca aserţiuni despre

formele matematice. Exactitatea, atemporalitatea propoziţiilor matematice sugerează plauzibilitatea concepţiei (platoniciene) conform căreia entităţile aritmetice şi geometrice au o existenţă obiectivă, eventual inter-subiectivă. Concepţia lui Platon pare să fie în acord cu înclinarea firească a *matematicienilor „lucrători"* care se consideră mai curând nişte descoperitori de adevăruri noi, adică, parafrazând pe Frege, sunt geografi şi nu arheologi.

Geneza *„lumii inteligibile matematice"* este explicată prin intervenţia, *cuplului* principiilor suprasensibile *„Unu-Diada"* considerat mai curând cauza activă, uneori înţeleasă numai ca „Unul" căruia i se adaugă principiile care guvernează tot domeniul existenţei, am numit *finitul şi infinitul*. Existenţa inteligibilă, precum şi existenţa matematică, parte a ei, este generată de „Unul", „finitul" şi „infinitul", căci, cum spune Proclos [1, p. 148], „genurile de existenţă inteligibilă participă prin simplitatea lor mai întâi de toate la finit şi infinit, datorită unităţii şi identităţii lor, capacităţii lor de permanentizare şi durabilitate, ele sunt impregnate cu finit; datorită distribuirii pe o mulţime întinsă, datorită puterii generative, alterităţii divine şi procesului de generare, ele sunt subordonate şi acţiunii infinitului. Existenţa matematică provine şi din finit şi din infinit...".Domeniul esenţelor inteligibile este guvernat de aceste principii (finitul şi infinitul), căci sunt dominate de cauza limitativă dar se revarsă la infinit şi tot astfel este numărul începând cu unitatea, care totdeauna este finit, dar în acelaşi timp are posibilitatea să crească la infinit. Lucrurile stau identic când examinăm mărimile, deoarece mărimile divizate sunt finite, însă procesul divizării se derulează la infinit. „Suprimarea" infinitului ar semnifica exclusiv comensurabilitatea mărimilor şi în consecinţă dispariţia proprietăţii „iraţionalităţii", a entităţilor iraţionale şi cu aceasta şi a „graniţei" dintre aritmetică şi geometrie, în fapt un „colpas" al capacităţii creatoare a unităţii. Pe de altă parte, *desfiinţarea"* finitului, ar echivala cu eliminarea comensurabilităţii din matematică (elementul comun al rapoartelor), a identităţii formelor, a egalităţii şi a tot ce implică o bună ordine în lumea obiectelor matematice.

Din cele afirmate putem formula două aserțiuni-concluzii: a) este evident că matematica este subordonată aceloraşi principii ca orice altă existență; b) matematica, ca şi alte genuri de existență, nu se poate dispensa de cele două principii – *fînitul* şi *infinitul.*

Dar dacă expunerea noastră a putut fi convingătoare privind principiile *„Unul", „finitul", „infinitul",* nu tot aşa de clar apare rolul *diadei* (dualității). Diada este un aspect fundamental şi relevant al procesului *„demiurgic"* al lumii inteligibile, matematice. După unii interpreți, îl menționăm aici pe D. Bădărău [1, p. 412], dualitatea indefinită şi duplicativă este în filosofia lui Platon principiul material, opus Unului. „Cuplul Unului şi al Dualității (Diadei)" – scrie autorul român – „este o reminiscență la Platon care îşi are originea în filosofia pitagoreiciană, unde Numărul, esență a lucrurilor, devine un principiu de explicare a lumii numai dacă îl completăm cu noțiunea de infinit, care la rândul ei nu este nimic fără participarea unității; de aici, la pitagoricieni, diada unității şi a infinitului". Concluzia ar fi că nu diada indefinită este primul element, ci numărul, dar adăugăm noi, ea rămâne *intermediatorul, mijlocirea* în *actul demiurgic* al *genezei entităților inteligibile,* de fapt, matematice. Geneza *„ființelor" matematice* a fost soluționată diferit de marii filosofi antici, dar elementul lor comun era referința la lucrurile sensibile. Dintr-o perspectivă s-au conturat două modalități: una consideră că existența speciilor şi genurilor matematice provine prin *abstracția* de la lucrurile sensibile (Aristotel), a doua explică existența abstractă a entităților matematice „prin însumarea trăsăturilor particulare într-o idee generală". Din această perspectivă, atribuită lui Platon se recunoaşte existența ființelor matematice ca fiind anterioară şi deci „arhetipală" în raport cu universul fizic, spațio-temporal perceptibil. Dacă admitem că existența matematică este derivată din cea a lumii sensibile (conform primei perspective), sufletul „plăsmuind" *aposteriori* în sine idei-entități, forme matematice ca ideea de cerc sau de triunghiuri materiale, atunci rămâne problema explicării caracterului exact ce îl au propozițiile matematice. Lucrurile matematice aflate în fluxul devenirii „heraclitiene" sunt incompatibile cu o existență permanentă a ideilor

imuabile. Dacă tot ceea ce este cauză a unei cunoştinţe invariabile este cu atât mai mult de aceeaşi natură, cum remarcă Proclos [1, p. 151], şi dacă este imposibil să transpunem „caracterul celei mai înalte perfecţiuni de la ceea ce este imperfect la formele perfecte şi absolute de existenţă", (admiţând că formele matematice provin sau din lumea sensibilă, sau din suflet), atunci numai rămâne decât să susţinem în acord cu autorul citat că „sufletul trebuie admis ca creator al conceptelor şi formelor existenţei matematice". Dar avem aici un teren comun pentru ambele concepţii-platoniciană şi aristotelică. Proclos [1, p. 151] schiţează în acest loc comun – al *sufletului creator* – o „*bifurcare* Platon-Aristotel însoţită de pledoaria lui pentru concepţia primului dintre cei doi. „Dacă însă sufletul concepe în sine imaginile iniţiale – conform esenţei sale – conferindu-le existenţă concretă şi dacă produsele sunt emanaţii ale formelor existenţiale care se regăsesc deja în suflet, atunci printr-o astfel de atitudine noi ne aflăm de partea lui Platon şi am fi putut găsi adevărata existenţă a ştiinţei matematice". Proclos combate vis-à-vis de Platon concepţia lui Aristotel căci în ipoteza acestuia din urmă sufletul n-ar poseda şi nu şi-ar însuşi mai dinainte concepte şi ar produce doar o „ţesătură imaterială şi extrem de subtilă şi creează o ştiinţă aşa de însemnată", însă, atunci dacă „sufletul nu are existenţa acestora în sine (este vorba de forme – s.n. M. Ţ.), cum poate crea o multipilicitate aşa de complexă de concepte?". Concluzia de factură platoniciană şi vădit anti-aristotelică este evidentă în interpretarea propusă de Proclos [1, p. 151]: „dacă formele existenţiale matematice îşi au proveniența în suflet şi acesta nu posedă *ideile* creaţiilor lui din lucrurile sensibile, atunci el le lasă pe acestea să ia naştere din idei, şi durerile zămislirii sale creatoare sunt emanaţii ale formelor durabile şi eterne".

Vechii greci considerau că lumea este raţională şi cum raţionalitatea de tip matematic este cea mai pregnantă, urmează un rol specific al aritmeticii şi geometriei în ansamblul arhitectonic al realului. Şi cum aritmetica studiază şi raporturi între numere, iar geometria cercetează relaţiile (geometrice) deducem uşor că *universul ontic* al grecilor antici nu era redus la *substanţă*, *obiect*. Abel Rey (apud. Platon – „Opere" –

vol. I, p. XL) notează: „Să-i mulțumim lui Platon pentru că a văzut şi nu a subapreciat importanța *relației* şi nici faptul că cea mai precisă formă a acesteia este relația matematică". Aşadar lumea obiectelor matematice este complexă, ireductibilă la *ipostazierea substanței, obiectului;* de fapt, relația (raportul) – „*locuitor*" important al acestuia subunivers de entități (ale matematicii) – a condus, în unele cazuri specifice la straneități tulburătoare vis-à-vis de rațională tatea ce conferea atâta echilibru şi simetrie în plan nu numai intelectual ci şi moral, politic şi estetic, construcția metafizică platoniciană asumând, în mod evident, o *arhitectonică a valorilor, a axiologie.* Aceste stranietăți, sfidând puterea rațională a omului, au fost furnizate de matematici şi au fost datorate celebrului fenomen al *incomensurabilității* laturii şi diagonalei unui pătrat, ceea ce semnifică absența unui număr calculabil, rațional care să exprime raportul dintre cele două lungimi; în universul matematic al grecilor din antichitate apărea un „*intrus*" straniu cu un comportament aberant de la exigențele raționalității – este vorba de *numărul irațional. Fenomenul incomensurabilității* (conex relațiilor matematice) a trasat „granițe" între sfera aritmeticii şi cea a geometriei, incomensurabilitatea fiind depăşită în cadrul ultimei. Într-adevăr, în cazul în care construim pătratul diagonalei, acesta ne dă raportul căutat, ca raport (de egalitate) între acest pătrat şi suma pătratelor geometrice ale celor două laturi. Platon a văzut în aceasta *„raționalizarea" geometrică a iraționalului.* Eliminarea *„iraționalizării"* se poate face prin apel la geometrie şi, în acest caz, este vorba de rădăcina pătrată a lui 2. În geometrie se poate construi un pătrat a cărui latură să fie diagonala altui pătrat cu latura 1, pătratul construit fiind egal cu 2. În lumina acestor evenimente s-au înregistrat profunde semnificații atât în plan *matematic,* cât şi în plan *epistemologic*, dintre care amintim: *numerele*, care până la aceste evenimente *dețineau poziția centrală pe scena matematricii,* s-au dovedit *reductibile* (în cazul iraționalelor) *la figuri geometrice,* şi prin aceasta geometria dobândeşte „o întâietate" vis-à-vis de aritmetică; *epistemologic*, se produce o *„erodare"* şi deci o *„detronare* a *intuiției aritmetice*" în favoarea *intuiției geometrice.*

Matematicul are, în ontologia platoniciană, funcția de *intermediar* între cele două sfere (ale ideilor şi ale lucrurilor) şi eforturile filosofului grec de a menține „*separația*" între cele două lumi – inteligibilă şi sensibilă – par răsplătite. Ideile matematice aduc o justificare a *autonomiei* lumii inteligibile, deoarece ele au o particularitate remarcabilă fiind singurele idei care nu au statutul de esențe ce ar corespunde unor lucruri sensibile; în lumea sensibilă nu există nici numere, nici figuri geometrice în sine, ca forme matematice.

Cultura matematică a produs în viziunea lui Platon o axiologie cu relevanță cosmică. Platon [11, VII, 818c] spune că omul este o ființă divină deoarece posedă ştiința numerelor şi astronomia, iar acest fapt semnifică după el (Platon [2, 47, AC]) a fi filosof. Organizarea cetății este viabilă dacă respectă principiile comensurabilității şi proporțiilor matematice, iar privind meşteşugurile, politica, economia le posedă numai cei inițiați şi exersați în ştiința numerelor (Platon [1]). Suprema înțelepciune nu se poate dobândi decât prin studiul matematicii, căci înțelept este cel care a pătruns unitatea Universului, ori aceasta este accesibilă matematicii, ştiința care dezvăluie acordul existent în orice figură geometrică, în orice combinație ordonată de numere, în orice compoziție muzicală, ca şi armonia mişcărilor siderale". Caracterul de real al naturii şi vieții sociale nu poate fi identificat, explicat şi justificat fără invocarea studiilor matematice, pare să fie concluzia fundamentală a viziunii ontologice a lui Platon.

După unele interpretări, matematica i-a servit lui Platon în *dialogurile de bătrânețe* să-şi reconsidere întrucâtva opinia față de realitatea sensibilă, deoarece individualitatea oricărui lucru, „locuitor" al acestui gen de existență, este produsul unui „amestec" între anumite infinitudini calitative şi finitudini individualizante, amestec reglat de măsură (cuantumul presupus de acel individual). I. Banu [1] notează: „Ori măsura, cuantumul sunt determinări matematice. Un lucru este ceea ce este printr-o dublă cuantificare (matematică): a) el, prin identificarea lui, este un agregat al unui *număr* determinat de calități ideale (Socrate este Rațiune + Virtute + Bunătate + Spirit Civic + Simț estetic etc.); b) din fiecare calitate el posedă

o *cantitate* determinată, care poate fi exprimată numeric" formulări platonice parafrazate, *apud.* Platon [3, p. XLIV]). Asemenea formulări, în ciuda caracterului lor vechi, sugerează că Platon a depăşit principiul pitagoreic „*orice lucru este număr*" care condensa o prea directă semnificaţie „*substanţială*", în sensul „capturării" acestuia într-un *principiu mai modern, dialectic, al calităţii şi cantităţii.*

Platon are o viziune matematică astotcuprinzătoare, astfel că în Platon [2] sugerează o geometrizare a elementelor materiei, (cele cinci tipuri de poliedre sunt considerate ca figuri volumetrice corespunzătoare celor 4 substanţe) şi a întregului univers după cum urmează: cubul pentru pământ, isoscelul pentru apă, octaedrul pentru aer, tetraedrul pentru foc, iar dodecaedrul pentru univers. Şi, mai mult, prin analogie cu atomismul, democritian, analogie care, firește, l-ar fi iritat profund pe Platon, deoarece suprafeţele poliedrelor sunt triunghiulare (sau reductibile la triunghiurile echilaterale ori isoscele) se poate conchide că *triunghiul* drept este figura *„atomară"* a Universului. Geometria în filosofia lui Platon părăseşte *semnificaţia originară,* căci încetează, cum sugera etimologia termenului însuşi, de a mai fi o ştiinţă legată exclusiv de pământ, dobândind acum valenţele complexe, relevanţa devine cosmică, obiectul ei este acum sfera universului, universul este un autentic obiect geometric „*capturat*" într-un complex edificiu de componente triunghiulare. Abel Rey (*apud,* I. Banu [1]) apreciază că poate numai pitagorerii pot fi comparaţi cu Platon referitor la această viziune matematizantă asupra întregului univers, însă el rămâne, oricum „singurul savant al antichităţii care a văzut în ordinea matematică raţiunea ordinii, a «legităţii» fizice".

Dar *matematismul platonician* oferă cheia înţelegerii nu numai a Universului, sau, poate, mai corect, a nivelului sensibil, ilustrat de fizică, astronomie, cosmologie, ci şi a nivelului inteligibil; referitor la nivelul sensibil în „*Epinomis*" (977C) (*apus* Platon [3, p. XLVI]) găsim aserţiunea care tocmai probează interpretarea de mai sus, şi anume că cel care nu posedă ştiinţa numerelor „nu va putea să-şi asigure asimilarea raţională a ceea ce a dobândit pe care perceptivă".

Revenind la funcția *matematismului platonician* în înțelegerea sferei ideilor, observăm, în spiritul acestei filosofii, că această lume inteligibilă, sfera „cea mai reală" a Universului, va trebui să explice şi să justifice esența relațiilor calitative şi cantitative proprii lucrurilor din univers. Prin natura lor, ideile sunt relevante pentru calități, însă sfera, extensiunea lor conține un aspect ce ține de cantitate, iar între comprehensiunea (conținutul) şi extensiunea (sfera) lor se stabileşte o proporționalitate inversă, susceptibilă de calcul matematic cu funcție orientativă în această sferă a Ideilor. „Dar tema calitate-cantitate, cerința statornicirii cuantumului calității – ştiind că Ideile dau socoteală de calitățile lucrurilor – conduce pe Platon către conturarea nivelului de *esențe cantitative*, Numere şi Figuri Ideale, destinate să contureze cvasiautonomia cu care matematicul operează în lumea Ideală şi guvernează funcțiile pur calitative ale acestora. De aceea – cum rezultă vag din dialoguri, dar destul de explicit din relatările orale din Academie – Principiile matematice (*Numere şi Figuri Ideale)* constituie un *nivel aparte în structura târzie,* a treia, a *Teoriei Ideilor,* suprapus nivelului acestora, (o distincție structurală între idei şi principii matematice pe care nu o acceptă toți interpreții moderni). Numerele şi Figurile Ideale au misiunea de a statornici pe planul esențelor gradul de multiplicitate al lucrurilor reale, guvernate de calitățile ideale şi, respectiv, geometria lor intrinsecă. Sunt deci principii aritmo-geometrice ale calităților" (I. Banu, [1, p. XLVI]). Dacă numărul Ideilor-calități este poate infinit, cel al principiilor matematice, să le numim din considerente de simetrie Idei-cantități, este strict determinat: zece numere şi patru figuri ideale. Pentru Platon, principiile, ideile matematice sunt abstracții superioare Ideilor, subîntinzând o mai mare diversitate, căci sunt capabile să exprime funcții cantitative chiar ale Ideilor.

„*Oficiul" de intermediar* este demonstrat de unii exegeți, între care şi autorul mai sus, citat, din perspectiva ontologică şi din perspectivă gnoseologică. *Ontologic*, numerele sunt considerate legate de sensibil, deoarece exprimă multiplicitatea, fiecărui individ, multiplicitatea membrilor unei specii, în consecință, seria infinită a numerelor ar fi de

ordinul celor sensibile şi raţionamentul se aplică şi în cazul figurilor geometrice. În acelaşi timp, orice număr este inteligibil, deci imaterial, unic, imuabil, atribute ale Ideilor, ceea ce face din numere entităţi ideale, după cum despre figura geometrică – pătratul – spunem din aceleaşi raţiuni că este un principiu al cvadraturii, o figură ideală. Înrudirea principiilor matematice cu sensibilul, dar şi cu inteligibilul îi conferă rolul de intermediar. *Gnoseologic*, spunem numai că matematica asigură abordarea ştiinţifică a sensibilului şi-l justifică ca o „punte" şi între matematica pură şi matematica aplicată.

2.8. FILOSOFIA PLATONICIANĂ A MATEMATICII CA DIALECTICĂ SAU METAMATEMATICĂ

Meditaţia filosofică (platonicianã) asupra matematicii a avut o profundă influenţă asupra teoriei generale a cunoaşterii pe care filosoful grec a construit-o. După unii interpreţi moderni ai filosofiei antice, pitagoreii puneau pe acelaşi plan ştiinţa şi filosofia, Socrate îndemna la determinarea ipotezei prin investigaţie prudentă, în timp ce Platon se va angaja pe un drum nou: filosofia sa a matematicii va plasa matematica ca o „*ştiinţă intermediară*", situată în regiunea διανοια în sensul că adevărul ei subzistă, rezidă într-o ştiinţă superioară.

Filosofia matematicii a lui Platon, la nivelul cel mai înalt şi în forma sa definitivă, era „*dialectica*" sau „*metamatematica*" pe care, însă, el nu a expus-o complet; obiectul investigaţiei acesteia îl consituie „*numerele ideale*" şi „*figurile*", „*mărimile ideale*", dar despre modul în care se determină precis natura acestor entităţi nu aflăm de la Platon.

Despre dialectică în accepţia anticilor am mai spus unele caracteristici, aici să reamintim doar ceea ce considerăm esenţial şi ca având legătură cu problema ce o tratăm. Dialectica este o metodă de argumentare caracteristică metafizicii (filosofiei) şi derivă în limba greacă de la verbul „*a discuta*", premisa dialectică fiind, cum spune Aristotel [4], una aleasă de un participant la dezbatere în argumentare. Dialogurile

lui Platon exemplifică aplicarea acestei metode şi în Platon [5], aşa cum deja am mai spus, Teetet postulează teza după care „*cunoaşterea este percepere*", iar din această premisă Socrate deduce consecinţele ce-l constrâng pe acesta să o abandoneze. În perioada mijlocie Platon foloseşte dialectica în vederea stabilirii, mai corect, a examinării propoziţiilor, denumite „*ipoteze*", prin evaluarea consecinţelor derivate din acestea; dacă consecinţa era inacceptabilă, ipoteza trebuie respinsă. Schema de raţionnament folosită ducea numai la rezultate negative: „Dacă P, atunci Q; dar nu Q, deci nu P"; argument tipic de argumentare pentru respingere, observă W. şi M. Kneale [1, p. 16]. Procedeul presupunea, oricum, faptul să se obţină prin derivare consecinţe empirice, cunoscute ca false, dar mai cu seamă metoda se baza pe deducerea unor consecinţe autocontradictorii (Platon [6]).

W. şi M. Kneale opinează despre modelul tipic de argumentare angajat de metoda dialectică, că „i-a fost probabil sugerat lui Platon nu numai de procedeele lui Socrate de respingere a opiniilor necritic susţinute de contemporanii săi, dar şi de folosirea raţionamentelor metafizice prin *reductio ad impossibile* de către Zenon din Eleea. În „Parmenide" Platon îl pune pe Zenon să susţină că ar fi scris o carte în care apără monismul lui Paramenide, scoţând la iveală consecinţele absurde ale supoziţiei că „există o pluralitate". Zenon ar fi considerat, după unii ca Diogene Laertius şi Sextus Empiricus, inventatorul dialecticii. Dar ceea ce Aristotel i-a atribuit lui Zenon, despoperirea folosirii lui *reductio ad impossibile* în metafizică e probabil să-i fi fost sugerat acestuia de folosirea ei în matematica pitagoreică. „Într-adevăr, se presupune că pitagoreicii au descoperit incomensurabilitatea diagonalei cu latura pătratului, respectiv, în terminologia modernă iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$, iar demonstraţia acestei propoziţii, care ni s-a păstrat ca o intercalare în textul lui Euclid, are forma unei înaintări spre imposibil". (M. şi W.Kneale [1, p. 16]). Euclid din Megara a atacat demonstraţiile nu prin premise, ci prin concluzie, iar membrii şcolii sale erau numiţi dialecticieni. Socrate însuşi a practicat această tehnică de

respingere a ipotezelor prin indicarea consecințelor incompatibile la care acestea conduceau. Deosebirea față de Zenon ar fi, (admisă esența metodei ca *reductio ad impossibile*), că rezultatele la care conduc ipotezele nu trebuie neapărat să fie autocontradictorii, este suficient să fie doar false, ceea ce am văzut din „Fedon".

Platon [7] pare să fixeze un alt înțeles „dialecticii" şi anume este metoda de argumentare ce implică respingerea, dar conduce, în cele din urmă, „la rezultate pozitive de mare generalitate". În perioada târzie dialectica devine metoda diviziunii (a căutării definițiilor prin dihotomia noțiunilor, începând cu cele generale) şi reunirii.

Epistemologia şi metodologia platoniciană, componente ale filosofiei sale a matematicii, au fost înrădăcinate în criza matematicii eline provocată de iraționalitatea (rădăcinii lui 2). Prin descoperirea iraționalelor (a incomensurabilității) relația dintre gândirea aritmetică şi realitate s-a rupt *„domnia numerelor"*, marcată de descoperirile capitale ale pitagoreilor, a eşuat; aritmetica a cedat locul geometriei, *„dinastia aritmetismului" a fost înlocuită de cea a euclidianismului.* Gândirea şi intuiția aritmetică s-au dovedit vulnerabile în fața amintitului fenomen al iraționanelor, granițele inteligibilității (pur aritmetice) au fost depăşite de geometrie şi construcțiile ei. Paralelismul conceptelor numerice şi al reprezentărilor geometrice n-a mai putut fi menținut. *Situația conceptuală nouă* a plecat de la relația dintre catetele şi ipotenuza unui triunghi drept, fixată ca un adevăr în celebra teoremă a lui Pitagora; datele sunt următoarele într-o relatare succintă (datorată lui L. Brunschcicg [1]): pătratul este figura dreptunghiulară cea mai simplă, pătratul numeric cel mai simplu fiind acela a cărui latură este egală cu unitatea; observația empirică relevă că dacă diagonala pătratului, care are latura egală cu unitatea, este luată drept latură a unui nou pătrat, suprafața acestuia este egală cu doi. Problema care se pune acum este următoarea: care va fi lungimea exactă a ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel ale cărui laturi sunt egale cu unitatea? Încercările de a găsi o expresie fracționară al cărui pătrat să fie egal cu 2 au eşuat. Este definitiv eşecul? S-ar putea descoperi rădăcina exactă a lui 2 operând cu unități de măsură din ce în

ce mai mici? Grecii au tranşat problema printr-o demonstraţie. Dacă diagonala este comensurabilă cu latura pătratului, atunci raportul ia forma unei fracţii ireductibile $\frac{d}{c}$. Teorema lui Pitagora $d^2 = 2c^2$ ne spune că d este *par*, de aici s-ar putea conchide, d şi c fiind prime între ele, că c este *impar*. Însă caracterul par al lui d permite rescrierea teoremei sub forma $4\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2c^2$ sau $2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = c^2$ ceea ce antrenează paritatea lui c.

Presupunând d şi c comensurabile, rezultă că c este în acelaşi timp impar şi par. Concluzia raţionamentului este că se stabileşte imposibilitatea de a face să corespundă un număr determinat de unităţi diagonalei unui pătrat care are unitatea ca dimensiune a laturii; numărul ar trebui să fie acela care are pătratul 2 şi cum ar trebui să fie în acelaşi timp par şi impar nu ar avea „*stare civilă*" fiind în afara inteligibilităţii raţionale profesate de pitagorei. Ontologic, existenţa matematică a fost echivalată de pitagorei cu un gen de inteligibilitate aritmetică, ori iraţionalele transcend sfera existentului astfel conceput. Dar, interesant, mărimea în cauză „*condamnată*" în numele tipului de inteligibilitate raţională admisă de pitagorei, deşi nu este, nu poate fi măsurată în plan numeric, poate fi construită şi determinată în plan geometric. S-a produs ruptura *echilibrului* şi amintitului mai sus *paralelism aritmetico-geometric* statuat în filosofia pitagoreică a matematicii. „*Dogmatismul" pitagorician* a fost invalidat de aritmetică greacă, celebrele aporii ale lui Zenon semnificând pentru vechii greci imposibilitatea coincidenţei dintre pluralitatea discontinuă, pitagoriciană a punctelor aritmetice (sau chiar pluralitatea democritiană a atomilor întinşi) şi realitatea continuă a concretului.

O nouă concepţie despre *cunoaştere* şi *adevăr,* în particular despre *matematică* şi *intuiţie.* Dialogurile platoniciene consemnează evenimentul major, de răscruce din istoria ştiinţei antice, şi de pildă în Platon [12] se stăruie asupra acestui aspect al cunoaşterii matematice, atunci când pentru demonstrarea „*tezei reminiscenţei*" imaginaţia numerică duce la răspunsuri

inexacte, mărturisind o epuizare a resurselor cunoaşterii aritmetice dogmatice. Extinderea inteligibilității s-a produs sub impactul cunoaşterii geometrice, de acum dogma prea naivă a pitagoreismului despre identificarea lucrurilor cu numerele devine insutenabilă.

Cunoaşterea matematică nu trebuie izolată de întregul sistem platonician al ştiințelor, de doctrina platoniciană a ştiinței şi care trimit în ultimă analiză la distincția „sensibil-inteligibil", centrală în ontologia şi gnoseologia marelui filosof. Este valorificată remarcabil contribuția lui Socrate privind degajarea noțiunii şi sprijinirea gândirii participanților la discuție pe *ipotezele inițiale* (de pornire), de fapt cerințe ale dialecticii socratice pe care doctrina platoniciană a ştiinței calchiază.

Ştiința matematicii invită la contemplarea naturii proprii a entităților cu care operează: numere, figuri, mărimi etc. Aritmetica, de exemplu, parvine la ipoteze fundamentale, cum ar fi cele referitoare la diviziunea numerelor pare şi impare şi, pornind de aici, formulează propoziții pe care încearcă să le demonstreze. Geometria operează cu figuri vizibile, mai precis se serveşte de acestea, dar obiectul gândirii geometrice îl constituie o realitate mai profundă cu care acestea se aseamănă. Demonstrațiile geometrice îşi au rațiunea lor adâncă în existența unor entități de genul „pătratul în sine", „diagonala în sine" etc. şi nu în corespondența lor plastică în reprezentări grafice uzuale, ce nu sunt decât simple imagini, la care matematicienii recurg pentru a sugera aceste realități care sunt accesibile numai prin intermediul gândirii pure.

Activitatea matematicianului constă esențialmente în demonstrații, acestea trebuie să fundeze propoziția enunțată pe *principii elementare*. Diogene Laertiu şi Proclus ne-au transmis că Platon (îndeosebi prin Cartea a VII-a a „Republicii") este cel care a introdus în geometrie metoda analitică, a cărei caracteristică constă în aceea că duce propoziția până la un principiu admis. Uzul metodic al analizei rezidă nu în descoperirea adevărurilor (matematice), ci în descoperirea propozițiilor (lemele) care ar permite verificarea. De fapt, Pitagora, generațiile ce i-au urmat şi însuşi Platon au avut preocupări metodologice ce vizau degajarea metodelor de demonstrație, o activitate care nu îi era străină lui Socrate.

Regresia analitică pleacă de la observația asupra sensibilului şi a practicii pentru a ajunge la ipotezele fundamentale pe care se bazează matematicianul, în timp ce ştiința procedează de la aceste ipoteze la consecințe.

Analiza este relativă la deducția progresivă, înaintează dincolo de ipoteze, încearcă să le fundeze pe principii.

Raționamentele au ca punct de plecare ipotezele, pe care, dacă sunt suficient de clare, nu le justifică. Aceasta este munca pe care o fac „*tehnicienii*", dar dacă nu se merge dincolo de supoziții, atunci această matematică (de nivel „*tehnic*") nu merită numele de ştiință (autentică).

Am văzut atitudinea pitagoreilor față de raportul „ştiință şi filosofie", şi anume aceştia le consideră pe același plan. Ori, Platon [7] face o distincție netă între filosofie şi ştiință, considerând filosofia ca autonomă.

Dialectica (metamatematica) are menirea în viziunea platoniciană de a întemeia ipotezele („tehnicilor particulare") pe principii, de a lua în posesie *regiunea necondiționatului*. Este un demers transcendent analizei, care forțează un lanț neîntrerupt de idei până atinge principiul absolut, zona lumii independente de sensibil.

Filosofia platoniciană a matematicii va fi dialectică sau metamatematică şi obiectul ei este, deci, format din numere ideale şi figuri ideale.

În Platon [6] este invocată „*teoria participării*" pentru explicarea naturii numerelor; astfel sesizăm o ezitare în a se considera că adiția lui „unu" este suficientă să producă „doi", de aceea este invocată „participarea" la esența proprie a diadei. Textul din „Fedon" susține concepția că ideea de număr este nu numai dincolo de numărul *sensibil*, ci şi dincolo de numărul *aritmetic*. Există o multitudine de numere asemănătoare între ele, neavând decât o unitate specifică, dar ideea este privilegiul unității veritabile, care este unitatea numerică ea însăşi. Fiecare dintre numerele până la zece are o idee corespunzătoare, fiecare asemenea idee având o structură proprie. Locul acestor numere ideale ar fi între idei şi principii.

Principiile numerelor sunt „unul" şi diada „Marelui" şi „Micului". Aristotel spune că „unul" este *forma*, iar „diada" este *materia*, o opoziție fundamentală conformă tradiției generale a cosmologiei greceşti şi ratașată profund opozițiilor pitagoreiciene, cu diferența că aici „limitatul" a devenit „unul", în timp ce „nelimitatul", opusul lui „unu", şi-a pierdut unitatea sa statică în favoarea unei divizări generatoare a unei duble mişcări a măririi şi micşorării . În Platon [4] infinitul este caracterizat astfel: „Tot ceea ce devine mai mult sau mai puțin, care comportă puterea şi dulcele, excesul şi orice alt lucru asemănător trebuie să-l raportăm la genul de infinit ca un sort de unitate". Unul este identicul, gen suprem, pe când infinitul comportă eterogenitate perpetuă.

Principiile numerelor ideale sunt principiul filosofiei matematice la Platon; din combinarea lui „unu" cu „infinitul" se produce dezvoltarea filosofiei platoniciene şi spre deosebire de predecesorii lui Platon, care operau o „*săritură*" în acest interval „unu-infinit", el obține, grație acestei combinări, etapele intermediare pentru a putea domina diversul şi mobilul cu un principiu al „limitării", ce face să înceteze contradicțiile şi să apară măsura şi armonia.

Conceptele de număr şi proporție nu au doar un caracter pur matematic, căci posedă şi o frumusețe internă, de ordin intelectual, dar şi o valoare afectivă, morală.

Grație dialecticii, matematica încetează de a mai fi o simplă ştiință strict pozitivă, ea acum participă la ideea de Bine (am adăuga şi de Frumos) sau prin intermediul acesteia din urmă participă la prima), devine o autentică ştiință a măsurii, cu un nou orizont de aplicație şi orientată spre un ideal de finalitate; conexiunea matematicii cu „*umanitățile*" este pe deplin asigurată.

Panmatematismul platonician este excelent ilustrat în Platon [1]: corpurile elementare au forma poliedrelor regulate (tetraedre, octaedre, isoscaedru, cub etc.) provenite, derivate din formele simple ale triunghiului (triunghi dreptunghic, isoscel, echilateral). Cele patru elemente prin dispunerea lor formează o proporție geometrică, şi cărei membrii sunt „*numerele solide*" (produse de trei numere prime). Pământul

şi focul sunt extremi iar apa şi aerul intermediari (mezi) şi condiţia conexiunii, element pentru înţelegerea unu-infinit, este îndeplinită, condiţie a ştiinţei platoniciene, dar şi a intervenţiei Demiurgului, condiţie a frumuseţii, care este frumuseţea liniilor şi a legăturii fenomenelor. Cosmogonia aritmetrică în Platon [2] include ştiinţe ca astronomie şi până la patologie. Panmatematismul platonician a matematizat natura, anticipare a ştiinţei moderne – reducerea fenomenelor la combinaţii aritmetice sau geometrice. Pretenţia pitagoreismului şi platonismului este nu numai identificarea raporturilor ci şi stabilirea corespondenţei termen cu termen; odată stabilite proprietăţile unei „esenţe numerice", aceste proprietăţi vor fi regăsite într-o realitate oarecare de ordin diferit pe calea analogiei.

Dar principiile „unul" şi „infinitul" ca numere determinante ale sufletului şi corpului au o încărcătură dincolo de caracterul şi puritatea specifică aritmeticii; cum comunică principiile o virtute ultra-cantitativă numerelor? Punctul central al metamatematicii platoniciene rămâne determinarea numerelor ideale care sunt plasate dincolo de numerele matematice proprii; dar, în dialoguri Platon păstrează tăcerea asupra acestui aspect, tot ce mai aflăm datorăm notelor de la sfârşitul „Metafizicii" lui Aristotel. Ceea ce aflăm despre doctrina academică a numerelor ideale sunt următoarele: tetrada este compusă din diada primă şi diada nelimitată. Operaţia de compunere presupune un element pasiv şi element activ, diada indefinită are rol de multiplicator, mai precis de duplicator, ceea ce îi conferă putere nelimitată, ea produce octada. Diada determinată este „acaparată"; se naşte oare prin aplicaţia unităţii la diada indeterminată? În şcoala platoniciană şi pitagoreiciană unitatea nu este număr. În cartea M a „Metafizicii" deducţia numerelor ideale nu include generarea unităţii. Matematica nu porneşte de la numărul unu, ci de la „egal", sub forma egalităţii în care unitatea se aplică diadei „marelui" şi „micului"; egalizarea termenilor inegali ai marelui şi micului produce diada determinată, prototipul numărului doi.

Dacă aceasta este relaţia dintre „doi-ideal" şi rolul diadei, cum are loc deducţia numerelor impare? diada ca matrice „*zămislitoare*" a

numerelor nu produce şi pe cele impare. Cartea M a „*Metafizicii*" sugerează că în numărul impar, „unul" este *mijlocitor*, intervenţia în unic a lui „unu" în adiţia unităţii fiecăruia din numerele pare, dar aceasta ar submina caracterul specific al *numerelor ideale*: *inadiţionalitatea* unităţilor lor, ceea ce le distinge de numerele aritmetice. Interpretarea din Cartea M atestă incoerenţa expozeului transmis despre teoria „ideilor-numere", sau a numerelor *ideale*, ca şi imposibilitatea unei reconstituiri obiective a entităţilor cu care operează metamatematica lui Platon.

Filosofia lui Platon ar fi trebuit, plasată iniţial la nivelul aritmeticii, să elucideze relaţia dintre triada nedeterminată şi triada determinată, ca şi în cazul relaţiei, stabilită de unitate, între diada nedeterminată şi diada determinată, ori o asemenea abordare angaja la introducerea triadelor şi pentadelor ca principii prime ca şi diada, o supoziţie ce ar fi afectat dualismul platonician, observă L. Brunschvicg [1].

După Robin ar fi mai plauzibil să luăm ca punct de plecare generalizarea acţiunii egalizatoare pe care o avem în vedere în constituirea primei diade şi să atribuim *unităţii* capacitatea de a fixa dubla mişcare a progresiei şi regresiei care exprimă natura „diadei marelui şi micului" ce produce stări astfel: pornind mişcarea progresivă de la 2, dacă cea regresivă pleacă de la 4, punctul de echilibru mutual este la jumătatea drumului, stabilitatea produce prima triadă. În ciuda eterogenităţii diadei este greu de admis ca ea să intervină într-un sistem de generare în acelaşi timp ca principiu al duplicării (operaţie) numerice, şi ca principiu al figurilor ideale. Sunt de asemenea unele obiecţii la reconstrucţia propusă de Robin, căci determinarea punctului de echilibru nu se extinde la dubla mişcare inversă, care ar obliga să se fixeze între 2 şi 3, între 3 şi 4.

Un alt aspect al metamatematicii lui Platon este separarea generării *numerelor ideale* de cea a *mărimilor ideale*.

Platon renunţă la identificarea pitagoriciană a *numărului cu* punctul şi păstrează punctul numai ca o convenţie geometrică. Punctul ar fi simetricul unităţii, care semnifică principiul numărului mai curând decât numărul însuşi.

La platonicieni corespondenţa se stabileşte între diadă şi lungime, între triadă şi suprafaţă, între triadă şi solid.

Care este relația dintre numerele ideale şi figurile (mărimile) ideale? există o identitate sau un paralelism între ele? Unii platonicieni consideră că „linia în sine" nu este altceva decât „diada", după alții există o identitate de formă, şi s-ar separa în sine. Cu aceasta se constată că platonismul este străbătut de o dualitate de tendințe. Dualitatea numerelor şi ideilor reținută dincolo de numărul sensibil mai mult în planul transcendenței, dar efectul negativ este cel al ambiguității fundamentale a metamatematicii platoniciene. Se cere o relevanță a numerelor ideale mai extinsă asupra întregului univers (morală, religie, geometrie, fizică etc.)? Apelul la entități supranaturale, monada şi diada ca divinități. Cu Speusipp se separă cantitativul şi calitativul, dacă acestea sunt numere aritmetice, le ridică la identitate, se reconciliază concepția pozitivă că ştiința se face cu numere, rolul pozitiv în combinații ale aritmeticii. Atunci devine însă inutil apelul la dialectică pentru a funda *„natura calitativă"* a fiecărui număr, esența parității sau imparității. Reprezentanții pitagoreismului observând că unității i se opune principiul general al multiplicității au făcut din acest principiu, prin procedeul uniform al adiției, demiurgul unei serii de numere omogene raportate unele la altele.

Şcoala platoniciană, remarcă L. Brunschvicg [1], nu poate scăpa de alternativa: sau matematica dialectică se va regăsi şi va fi refortificată ca mistică simbolică a pitagoreismului pentru a se pierde în ocultism şi în teozofie; sau ea trebuie să se limiteze la principii riguros determinate ale unei ştiințe pozitive şi atunci nu ar mai exista rațiuni pentru a le transforma în realități separate, însă atunci nu mai răspunde speranței de a fi instrument universal. Şi autorul francez comentează particularitățile platonismului ca filosofie matematică astfel: (a) aritmetica şi geometria inspiră doctrina lui Platon despre cunoaştere; între elemente semnificative sunt menționate proporționalitatea numerică şi „dozajul cantitativ" în viață, politică, morală etc.; (b) universalitatea raționamentelor matematice este conferită de universalitatea principiilor care le fundează; justificarea acestor principii se poate face pe calea unei viziuni directe a genurilor supreme ale existenței. Există o *„circularitate"* productivă în platonism, deoarece, pe de o parte, el derivă, extrage

filosofia din matematică, iar, pe de altă parte, fundează matematica pe filosofie. Aprecierile filosofiei platoniciene, judecățile istorice pronunțate asupra destinului ei își află sursa în grandoarea sa durabilă; căci, cunoaşte imediat o decadență şi reapare odată cu Renaşterea, mai exact, „a doua zi după Renaştere", devenind prin opera lui Galilei, Descartes, Newton şi alții substanța culturii occidentale moderne; răspunzătoare de această distincție este particularitatea platonismului de a fi o doctrină constituită prin intermediul științei numerelor şi figurilor (mărimilor) grație căreia va intui în țesătura fenomenelor lumii ordinea relațiilor matematice. Acest destin al filosofiei se confundă cu adevărul însuşi al filosofiei, iar dezvăluirea acestui adevăr a avut nevoie de 20 de secole de reflecție pentru degajarea şi relevarea purității acestuia; metoda analizei regresive introdusă de Platon în practica reflexiei speculative, critica dogmatismului au influențat progresul ştiințific modern, au indicat metodologia prin care spiritul îşi poate apropia natura, o operă pozitivă de rezolvare a problemelor, definitorie pentru orice demers veritabil al cunoaşterii umane; dialectica platoniciană audiată de primii săi discipoli, deşi, într-un sens străină, mai curând exterioară, prin autonomia ei, ştiinței, a înnobilat ştiința prin adăugarea unui demers preparator al cunoaşterii numită „*superioară*", ce „atinge" principiile existenței şi cunoaşterii. Partea tehnică a matematicii, domeniul ei strict de ştiință îşi află la acest nivel dialectic, sau metamatematic, sursele *ipotezelor inițiale* necesare combinării calculatoare şi a relațiilor metrice.

Eclipsa seculară a filosofiei cu baza matematică, am numit *platonismul*, s-a întâmplat într-un climat intelectual şi cultural în care prevalența *„tehnicului" a umbrit „teoreticul" ştiinței.* Revigorarea acestei filosofii în timpurile mai recente se explică prin marcata maturizare conceptuală şi metodologică pe care a străbătut-o ştiința, în speță matematica, care, începând cu sfârşitul de secol al XIX-lea şi, mai evident în secolul nostru şi-a asumat, adjudecat, consecință a fenomenului teoretic amintit, şi instanțe de natură autoreflexivă, în vederea legitimării statutului ei, problemă în cadrul căreia „*fundarea*" este aspectul central.

2.9. PROBLEMA EXISTENȚEI MATEMATICE LA ARISTOTEL: INFINITUL MATEMATIC ŞI NATURA MATEMATICII

Pentru Aristotel problema este nu aceea dacă există obiectele matematice, deci Stagiritul admitea existența entităților matematice, ci autentică este doar problema genului lor de existență. Aristotel [2, p. 100] scrie: „Obiectele matematice dacă există (sunt în act nu numai în potență) sunt în chip necesar sau în lucrurile sensibile, după părerea unor gânditori, sau există despărțite de lucrurile sensibile, căci sunt şi partizani ai unei asemenea păreri. Dar ele nu sălăşluiesc nici în lucrurile sensibile, nici în afara lor, atunci una din două: ele nu există, sau există în alt fel, aşa că controversa noastră nu va avea ca obiect *existența* lor, ci *felul* lor de a exista (s.n. M.Ț.)".

Care este acest gen de existență (al obiectelor matematice) şi ce are propriu? Aristotel afirmă că Platon a pretins că obiectele matematice sunt separate de lucrurile sensibile, afându-se la jumătatea drumului dintre *„idei"* şi *„lumea sensibilă"*. Stagiritul combate teza platoniciană după care entitățile matematice există separat de lucrurile sensibile, fizice, folosind argumentul că axiomele generale stabilite de matematicieni, ar trebui să constituie o altă esență, care există între idei şi obiecte matematice, deci ar avea funcția, rolul de intermediar, fără să fie nici număr, nici punct, nici mărime, nici durată. Aristotel [2, p. 403] scrie: „Însă dacă este peste putință să ne imaginăm o asemenea esență matematică va fi, evident, imposibil ca *obiecte matematice* să existe separat de lucrurile sensibile (s.n. M.Ț.)". Axiomele matematice nu pot exista deoarece ceea ce nu are nici număr, nici mărime, nici durată nu există, şi dacă axiomele nu există, atunci nici conținutul lor (obiectele matematice comune lor) nu există. Desigur, Aristotel elaborează o concepție proprie despre existența obiectelor matematice, (elaborare prin raportare critică la platonism şi pitagoreism), conform căreia obiectele matematice au la bază un *„substrat" material* (sensibil), deşi ele constituie un orizont *noetic, sui generis* fiind noțiuni abstracte, dar având şi caracterul de substanță, diferit de cel al

lumii fizice, perceptibile; să considerăm că ceea ce este specific pentru statutul obiectelor matematice este „natura lor *abstractivă*" (abstracții ale lucrurilor materiale). Aristotel consideră că admiterea tezei platoniciene, după care obiectele matematice au statutul de *„realități" separate* de lucrurile sensibile, antrenează dificultăți indezirabile, consecințe în vădit dezacord cu adevărul, dar şi cu părerea comună. Iată propria sinteză a concepției filosofului Aristotel: „Am arătat, aşadar, îndeajuns că obiectele matematice au caracterul de substanță într-o măsură mai mică decât corpurile, apoi ele *nu sunt anterioare lucrurilor sensibile în ordinea existenței,* că ele nu posedă decât o *anterioritate logică* față de lucrurile sensibile materiale şi, în sfârşit, că *ele nu pot să existe nicăieri ca ceva separat.* Şi deoarece nu se poate admite că ele ar exista ca inerente lucrurilor sensibile e limpede că ele nu există nicidecum sau că ele au un fel al lor anume de a exista şi de aceea, prin urmare, ele nu există în chip absolut, căci noi ştim că Ființa are mai multe înțelesuri" (Aristotel [2, p. 405]). Analizele aristotelice operează cu conceptele de anterioritate şi posterioritate luate în sensurile: în ordinea devenirii şi în ordinea substanței; în ordinea esenței şi în ordinea logică, perspective ce nu coincid. *Prioritatea în ordinea substanței* revine, după Aristotel, lucrurilor care există separat „au caracterul de ființă într-o măsură mai mare", pe când *prioritatea logică* este caracteristică acelor lucruri „a căror noțiune este implicată în altă noțiune", cele două priorități neputând coexista. În lumina analizelor aristotelice *existența abstractă* – pe care el o atribuie în primul rând entităților matematice, deşi cum deja am văzut, nu o rupe de obiectele sensibile – nu are anterioritate (substanțială) dar are anterioritate logică. Proprietatea anteriorității logice, combinată cu caracterul de simplitate, are o remarcabilă relevanță explicativă privind exactitatea unei ştiințe; în acest sens aritmetica este, după Stagirit, mai exactă decât geometria şi aceasta mai exactă decât mecanica, căci aceasta din urmă este o ştiință despre un obiect supus mişcării, ceea ce îi afectează atributul exactității (cf. Aristotel, [2, p. 407]). În lumina raportului aristotelic act-potență, filosoful grec a susținut referitor la statutul obiectelor, ființelor matematice, că acestea nu există *în act,* nici separat de universul sensibil (al lucrurilor fizice, perceptibile) ci numai în *potență.*

Să mai subliniem puțin ideea naturii „abstractive" a obiectelor matematice şi anume să reținem distincția pe care Aristotel o face între posibilitatea de a abstrage (a „scoate"), să spunem unitatea, triunghiularitatea, dreptunghiularitatea, în genere patrularitatea, circularitatea etc. şi existența independentă a caracterelor matematice menționate, ca şi a altora, inclusiv a reprezentanților acestora: unități, triunghiuri, dreptunghiuri, cercuri. „El subliniază deseori" – comentează S. Körner [1, p. 24] – „că posibilitatea de abstracție nu implică de loc existența independentă a ceea ce este sau poate fi abstras. Conținutul matematicii este alcătuit din acele rezultate ale abstracției matematice pe care Aristotel le numeşte «obiecte matematice». Acestea, în concepția lui Aristotel, luând naştere prin abstracție (aphaireșis), sunt incompatibile cu teza platoniciană despre autonomia şi substanțialitatea lor.

Obiectele matematice ar fi, după o interpretare, în lucrurile din care sunt abstrase şi ar exista o multiplicitate de obiecte (unități aritmetice, cercuri, linii drepte etc.) câte sunt necesare în demonstrațiile matematice.

O interpretare şi varianta ei, afirmă autorul englez citat, „mărul empiric este *unu* în sensul că el este un reprezentant al „unității" matematice, aşa cum *roşu* este un reprezentant al culorii universale „roşu", sau „mărul empiric" este *unu* în sensul că el este un membru al clasei unităților matematice, aşa cum el este *roşu* în sensul că este un membru al clasei lucrurilor roşii". Conform unei a doua interpretări, acceptată şi de Körner [1, p. 25], „mărul empiric este *unu* pentru că el aproximează unitatea matematică pe care *am abstras-o* din acest obiect şi poate şi din alte obiecte". În virtutea celei de-a doua interpretări identificăm natura acestei *abstracții* matematice care asigură geneza şi statutul obiectelor matematice; nu este o abstracție pur şi simplu ci o *abstracție idealizantă* sau o idealizare. După Platon obiectul matematicii îl constituie formele sau ideile, existente independent de matematician, pentru Aristotel matematica se ocupă cu idealizările efectuate de matematician, iar diferența dintre concepțiile lor referitoare la statutul entităților matematice s-ar diminua în lumina unei asemenea interpretări propuse.

Concepția lui Aristotel despre *natura matematicii* poate fi derivată din concepția sa despre *statutul obiectelor matematice*, astfel propozițiile matematicii aplicate aproximează pe cale ale matematicii pure, propozițiile despre cercurile desenate fiind o bună aproximație a celor despre cercurile matematice, obiecte ale acestei științe.

Aristotel a respins concepția lui Platon după care matematica este știința ale cărei propoziții poartă asupra (sunt descrieri ale) *fenomenelor* eterne și independent existente, ceea ce duce la o anumită explicație a *necesității* propozițiilor acestei științe, și nu numai, deoarece obținem o explicație și a *adevărului și a raționamentului matematic*. Astfel Platon [7], [9], [12] consideră că gândirea corectă, validă se conformează conexiunii dintre forme, iar conexiunile necesare au loc numai între forme; urmând în gândire conexiunile dintre forme realizăm inferențe valide. Legătura acestei concepții cu teoria despre adevăr în opera lui Platon se face astfel. El susține că o propoziție este adevărată dacă dispunerea părților sale reflectă conexiunile dintre forme, posibilitatea discursului este garantată de ipoteza că există o conexiune (necesară) între forme, și discursul adevărat vorbește despre realitate așa cum este. În mod esențial discursul este cel care poate fi adevărat sau fals. Și cum vechii greci au descoperit relația misterioară dintre negație și falsitate, în contextul problemei noastre aceasta înseamnă a spune că nici o aserțiune nu are sens fără ca și negația ei să aibe sens.

Odată respinsă de Stagirit concepția platoniciană asupra formelor matematice, în viziunea lui Aristotel operându-se cu idealizări, *problema adevărului* (idealizarea adevărată sau falsă) nu se poate pune, ea fiind înlocuită cu cea a *adecvării* relativ la un scop. Dar matematica ca „*sistem de idealizări*" comportă abordarea problemei necesității văzută nu izolat, adică cu privire la fiecare propoziție categorică despre obiectele matematice, ci la nivel global (al sistemului) al ansamblului propozițiilor ipotetice; dacă o anumită propoziție este adevărată, atunci o altă propoziție anumită este o necesitate adevărată. Sir Thomas Heath [2, p. 100] afirmă că *necesitatea* matematicii era aceea a propozițiilor ipotetice, logic necesare. Autorul englez, pe baza unor texte din „*Fizica*"

şi „*Metafizica*", afirmă despre concepţia lui Aristotel că ar fi „un fel de idee profetică despre o geometrie bazată pe alte principii decât cele euclidiene". Iar I. Toth [1, p. 266] scrie: Geometria euclidiană nu numai că a fost precedată de cea contra-euclidiană, ci din punct de vedere fenomenologic condiţionată chiar de aceasta. La Aristotel apare viitoarea geometrie ne-euclidiană, dar într-o formă respinsă. Ea este ştiinţa de pe acum dar în starea negativă a unei conştiinţe nefericite".

Am văzut că principala concluzie a concepţiei aristotelice despre statutul obiectelor matematice este că acestea nu există *în act, ci în potenţă*. Plecând de la acest „*nucleu*" al concepţiei lui Aristotel putem înţelege abordarea aristotelică a acelei „tulburătoare probleme" a gândirii ştiinţifice, cum a numit-o David Hilbert, este vorba de *problema infinitului* (în matematică).

Aristotel invocă cinci fapte în favoarea convingerii că există infinitul: infinitul timpului, diviziunea nelimitată a mărimilor, inepuizabilitatea generării şi distrugerii, limitatul este totdeauna limitat faţă de ceva şi infinitatea numărului.

Conform tradiţiei filosofice „*infinitul*" a fost considerat în două sensuri: a) infinitul ca substanţă; şi b) infinitul ca principiu. Referitor la prima accepţie găsim în Aristotel [3, 4, 203a – 203b] următorul pasaj: „Unii, cum sunt pitagoreii şi Platon, susţin că infinitul este un lucru în şi pentru sine, neexistând ca accident al altui lucru, ci ca fiind o substanţă în şi prin sine. Dar pitagoreii susţin că infinitul există în lucrurile sensibile – pentru că ei susţin că numărul nu este separabil – şi că infinitul este ceea ce se află în afara cerului. Platon susţine că în afara cerului nu există nici un corp, nici idei, pentru că ele nu există nicăieri, dar că infinitul este în lucrurile sensibile şi în idei... Platon însă susţine că sunt două infinituri: infinitul mare şi infinitul mic...".

Infinitul ca principiu este descris de Aristotel [3] în termenii următori: „toate lucrurile sunt sau principiu, sau rezultă din principiu, dar infinitul nu are principiu, pentru că atunci ar exista o limită a infinitului. Tot aşa, infinitul este negenerat şi nedestructibil, ca fiind un principiu: Infinitul nu are principiu, ci este el, după cât se pare, principiul altor lucruri pe care le conţine pe toate şi le guvernează pe toate".

Şi Aristotel propune o sistematizare a „speciilor" infinitului: infinitul *extensiv*, cu privire la adiție, pe care nu-l poate admite substanța sensibilă; infinitul *intensiv*, cu privire la diviziune; infinitul *potențial*; infinitul *actual*, acesta nefiind admis nici pentru mărimi şi nici pentru numere. Aristotel spune explicit acest lucru: „în acest fel numărul este infinit potențial, dar nu în act; însă numărul poate întrece întotdeauna cantitatea determinată a oricărei mărimi. Dar acest număr al dihotomiei nu este separat, iar infinitatea nu rămâne în permanență, ci devine cu timpul şi numărul timpului" (ibidem).

Distincțiile conceptuale expuse i-au servit lui Aristotel în abordarea „*aporiilor*" *lui Zenon* referitoare la *multiplicitate* şi *mişcare*, şi care operau în formulare cu *infinitul în act*. Iar soluția pe care Aristotel o avansează în „*Fizica*" cu privire la problema infinitului este aceasta: „Infinitul există atunci când un lucru poate fi pus după altul fără sfârşit, fiecare lucru pus fiind finit"; infinitul este, deci, potențial „nu trebuie să considerăm infinitul ca un lucru concret, cum este omul sau casa, ci aşa cum se înțelege ziua sau lupta, pentru care existența nu este o substanță determinată, ci este întotdeauna în generare, şi în distrugere dacă este limitată, dar este mereu altul şi altul". Şir infinit sau linie infinit divizibilă, adică constând din infinit de multe părți, primul prin posibilitatea de a adăuga o unitate la ultimul element al oricărui şir, exemplu cel al numerelor naturale, în al doilea caz posibilitatea de a face oricând o subdiviziune a unei linii.

Hintikka [1] propune o reconstrucție a principiului aristotelic al plenitudinii, din care degajă câteva consecințe privind concepția aristotelică despre infinit, cu relevanță pentru filosofia matematicii a Stagiritului: „Aristotel a admis existența mulțimilor actual infinite de obiecte (în sensul modern al infinității actuale), deşi nu existența mulțimilor infinite ai căror membrii există cu toții simultan. În mod obişnuit se spune că pentru Aristotel infinitul există potențial dar nu actual. Totuşi, în sensul precis în care am găsit că infinitul există potențial pentru Aristotel, el există de asemenea şi actual". Principiul plenitudinii îi permite lui Aristotel să deducă inexistența unei mărimi potențial infi-

nite din aserțiunea despre inexistența unei mărimi actual infinite. Textul aristotelic din „*Fizica*", III, 207b este acesta: „Într-adevăr, pe cât se admite că este potențial, pe atît se admite că este în act. În acest fel, de vreme ce nu există o mărime sensibilă infinită (adică în act) nu se admite că există o mărime definită, căci în acest fel ar exista ceva mai mare decât cerul". Aserțiunea despre finitudinea universului fizic, specifică concepției grecilor antici, intră în contradicție cu activitatea matematicienilor, iar Aristotel sesizează imediat dificultățile ce emerg din această situație conceptuală. El încearcă să arate că opera matematicienilor nu este „subminată" de teza „finitudinii" universului fizic: „de fapt ei n-au nevoie de infinit şi nu-l utilizează. Ei doar postulează că un segment finit de dreaptă poate fi produs în orice măsură ar dori. Este posibil să se dividă în acelaşi raport ca şi mărimea cea mai înaltă şi o altă mărime de orice dimensiune am dori. De aceea, pentru demonstrație, nu va apărea nici o diferență pentru ei dacă ar avea un asemenea infinit, întrucât existența va fi sfera mărimilor reale". (Aristotel [3, III, 7, 207b]). În consecință, în demonstrațiile matematice extensiile infinite sunt necesare şi au rolul de invers al diviziunii infinite, ceea ce ar susține compatibilitatea filosofiei aristotelice a naturii şi a cunoaşterii cu practica matematicienilor, o idee asupra căreia găsim şi în Th. Heath [1, p. 344] argumente potrivnice; alți autori insistă asupra neasimilării distincțiilor conceptuale aristotelice (ca de pildă, infinit actual – infinit potențial) în practica matematicienilor (S. Bochner [1]). În controversata problemă: „finitudinea spațiului fizic şi matematica, identică cu geometria", J. Lear [1] susține că nu avem de-a face cu o contradicție: „Geometria nu se referă la spațiul vid, ci la *figuri geometrice* definite prin indicații de construcție; aici infinitul are sensul posibilității de a continua o construcție", afirmă C. F. von Weizsäcker [1, p. 125]. După S. Körner [1, p. 27] Aristotel era categoric în favoarea infinității potențiale şi, în consecință, el credea că în demonstrațiile lor matematicienii nu aveau nevoie decât de acest gen de infinit. Dar, după reconstrucția propusă de Hintikka [1], acest lucru nu pare sigur, deoarece în demonstrațiile unor teoreme referitoare la figuri geometrice intervin construcții auxiliare, amplu exemplificate şi

comentate în „*Metafizica*" lui Aristotel şi în legătură cu care nu se poate decide, în principiu, dacă aceste construcţii nu cer existenţa unor linii oricât de mari. Punctul de vedere al lui Aristotel este că matematicianul nu are nevoie de extensii potenţial arbitrar de mari, ci numai de existenţa unor mărimi potenţial oricât de mici, deoarece „pentru orice demonstraţie a unor teoreme, în care intervine o figură dată, există o figură asemănătoare suficient de mică pentru care demonstraţia poate fi efectuată" (Hintikka [1]). Dar în contextul geometriei euclidiene, există unele aserţiuni geometrice, este cazul axiomei „*paralelelor*", care necesită extensiuni arbitrar de mari, ceea ce semnifică faptul că principiile aristotelice nu garantează „euclidicitatea" spaţiului, doctrina infinită a Stagiritului nu justifică integral practica geometriei. Am invocat în altă parte a lucrării noastre faptul că Th. Heath [1, p. 100–101] consideră punctul de vedere al lui Aristotel ca „un fel de idee profetică despre o geometrie bazată pe alte principii decât cele euclidiene", însă, aşa cum observă şi I. Pârvu [1, p. 54], pare mai convingătoare sugestia lui Hintikka deoarece geometria nu atinsese în timpul filosofului grec organizarea deductivă care să-i permită să evalueze rolul axiomei (postulatului) în determinarea esenţei dreptei şi în cunoaşterea geometrică. Tensiunea dintre concepţia aristotelică despre infinit şi practica geometrică este explicată de unii autori prin discutarea sensului abstracţiei matematice şi al naturii obiectelor de la care ea pleacă: „Prin teoria abstracţiei Aristotel ar fi încercat să demonstreze posibilitatea şi adevărul cunoaşterii matematice fără a apela la metafizica platoniciană a formelor ca entităţi independente, dar şi fără a reduce matematica la o cercetare a obiectelor de tipul ştiinţelor naturii fizice" (I. Pârvu [1, p. 54]). Finitudinea spaţiului sau a universului nu constituie o dificultate pentru practica matematicianului, deoarece, aşa cum remarcă H. G. Apostle [1, p. 79] „este sarcina fizicianului să cerceteze forma şi mărimea universului" şi, cum observă şi I. Pârvu [1], deşi Aristotel [3, II, 1, 193b–194a] spunea că „matematicianul studiază liniile fizice, dar nu ca fizice..." „abstracţia posibilă de unele trăsături ale liniilor implicată aici, nu rezolvă încă problema existenţei şi mărimii acestor linii".

Problema infinitului este abordată de Aristotel şi din perspectiva relației dintre conceptibilitate şi realizabilitate, reformulată în „*De Anima*" (III, 6, 431a) prin enunțul: „*cunoaşterea efectivă este identică cu obiectul ei*" (Aristotel [5]), şi care exprimă o viziune despre percepție, gândire şi cunoaştere în general, dar şi despre posibil, real şi necesar. Mai concis, „a gândi reprezintă o actualizare" pentru Aristotel, sau cum reformulează Hintikka [1] în interpretarea propusă: „Din această cauză, conceptibilitatea unei forme implică faptul că într-un anumit sens această formă este actualizată". Aristotel va aplica această idee şi cu privire la natura cunoaşterii matematice: „Prin activitate sunt descoperite construcțiile (sau teoremele), deoarece le descoperim prin efectul unei diviziuni. Dacă figurile ar fi date deja divizate, construcțiile (teoremele) ar fi evidente. Dar aceste diviziuni există doar potențial... Este deci clar că numai prin trecerea în actualitate devin evidente construcțiile (teoremele) ce există doar potențial. Cauza constă în aceea că gândirea unui geometru reprezintă o actualizare (Aristotel [2, IX, 9]). Concepția aristotelică despre statutul obiectelor matematice dobândeşte din această perspectivă, introdusă de relația dintre conceptibilitate şi realizabilitate, o nouă dimensiune cu relevanță şi pentru problema infinitului: entitățile matematice deşi există numai în gândire, deoarece gândirea unui obiect implică actualizarea *sui generis*, nu înseamnă că ele sunt mai puțin reale. Conceptibilitatea este identică cu realizabilitatea numai în cazul dimensiunilor relative şi nu absolute. Infinitul ca nemărginire, în sens absolut, (vezi tipologia din introducerea lui I. Pârvu [1]), nu este conceptibil în viziunea lui Aristotel; rezultă că în acelaşi sens în care infinitul nu este actualizabil nu este nici conceptibil şi invers, în acelaşi sens în care infinitul poate fi conceptualizat este şi actualizabil. Aristotel consideă că admiterea procesului de devenire la infinit face imposibilă ştiința şi cu privire la matematică se susține, din această perspectivă, că nici în cazul liniei drepte împărțirea la infinit, deşi posibilă, nu poate fi realizată în gândire, căci în acest caz nu poți înțelege acest proces dacă nu te opreşti cu diviziunea aidoma faptului că în lumea externă infinitul nu poate fi realizat.

Timpul şi mişcarea sunt actual infinite adică există un număr infinit de momente ale timpului şi mişcării obiectelor, ceea ce nu înseamnă o „actualizare" a tuturor „termenilor" procesului; enunțuri din *Metafizica*" ca „o mişcare infinită nu poate să existe"; „în acest act nu există un corp infinit" nu implică un sens absolut al existenței infinitului. Existența infinitului ca *potență* indică un mod de a-l conceptualiza, de a-l reprezenta prin forme infinite: infinitul nu există în realitate şi nici în gândire, ca individual: „Infinitul nu există potențial în sensul că mai târziu, el va exista actual şi separat; el există numai în gândire. Existența potențială a acestei activități ne asigură că procesul diviziunii nu va ajunge niciodată la un sfârşit, dar nu că infinitul există separat" („Metafizica", IX, 6, 1048b). După interpretarea lui Hintikka [1] infinitul are o existență neseparată, „depinde în existența sa de ființele finite, care intră în existență una după alta". Existența potențială a activității de divizare asigură procesul infinit al diviziunii; potențialitatea autentică dacă se continuă se actualizează, potențialitatea infinitului poate fi exprimată prin ideea că infinitul există într-un sens „necomun" al existenței, nu că este potențial într-un sens nou: „Infinitul, vidul şi toate lucrurile asemănătoare cu acestea se spune că există potențial şi actual într-un sens diferit de cel în care aceşti termeni se aplică pentru multe alte lucruri" (Aristotel [2, IX, 6, 1048b]).

Relevanța problemei şi soluției infinitului pentru filosofie şi ştiința demonstrativă, matematica fiind prototipul acesteia din urmă, este comentată de I. Pârvu [1, p. 58] astfel: „Imposibilitatea «străbaterii raționale a infinitului» corespunzând, ontologic, imposibilității actualizării lui (a unei succesiuni infinite de cauze) reprezintă astfel atât fundamentul metafizicii cât şi al teoriei aristotelice a cunoaşterii demonstrative, a ştiinței. În metafizică, această idee implică necesitatea unui «principiu suprem» care să înfrângă «regresul ontologic la infinit» („cauzele celor exietente nu sunt infinite, nici în ordinea unei succesiuni temporale, nici considerate ca gen" – „*Metafizica*", II, 2, 994a)". Finitudinea ontică datorită „*realismului sui generis al anticilor* implică finitudinea ca o caracteristică esențială a cunoaşterii existenței: „Cei care admit procesul de devenire la

infinit elimină ştiința... Spunem doar că noi cunoaştem un lucru când îi cunoaştem cauzele. Dar atunci ar fi peste putință ca, într-un timp mărginit, să parcurgem o infinitate de cauze care se leagă una de alta la nesfârşit" (Aristotel [2, II, 2, 994b]). Finitudinea existenței şi a gândirii raționale (un *finitism* justificat transcendentalist) este admisă pentru că face posibilă cunoaşterea cauzelor şi a structurii demonstrative a ştiinței. Finitismul aristotelic are rang de principiu metateoretic valabil în *etică* (căci numai postularea unui scop ultim o face posibilă) şi în *filosofie* (întrucât există un început determinat şi cauzele existenței nu sunt infinite ca număr)". Regresul la infinit este respins de Aristotel, căruia îi opune un *început* (trebuie să ne oprim undeva, de unde trebuie să pornim), întreruperea acestui regres constituind un merit al metodologiei aristotelice în edificarea unei ştiințe. H. Scholz [1, p. 32] scrie, evaluând acest finitism aristotelic, următoarele despre organizarea cunoaşterii deductive la grecii antici: „Prin acest finitism inexorabil a devenit Aristotel teoreticianul ştiinței... Atâta vreme cât există o ştiință strictă şi o axiomatică a ei rămâne valabilă afirmația lui Aristotel din „*Analiticele secunde*": «Propozițiile pentru a căror demonstrație sunt necesare infinit de multe alte propoziții anterioare sunt absolut nedemonstrabile; demonstrabile sunt numai atunci când un număr finit de propoziții anterioare sunt suficiente pentru aceasta". Soluția aristotelică este veritabilul drum de mijloc între cele două infinități, (cea a concretului şi cea a principiului), prin care s-a întemeiat conştiința filosofică a metodei ştiințifice ce a putut permite înțelegerea şi explicarea rațională a lumii. Paragraful următor explorează alte aspecte adiacente ale gândirii epistemologice şi mai ales metodologice a marelui filosof antic.

Revenim cu unele considerații referitoare la *statutul matematicii* ca ştiință în concepția lui Aristotel.

În primul rând, aşa cum arată Aristotel în „*Metafizică*", matematica se află în directă corelație cu ontologia generală (metafizica) în sensul că aceasta îi serveşte matematicianului în cercetarea fundamentelor principiilor pe care le foloseşte. Aristotel [2, K^4, 1061b] scrie: „Proporția că mărimile egale scăzute din mărimi egale dau resturi egale, este o lege fundamentală comună pentru toate mărimile; matematica îşi ia de aici în

considerațiile ei un caz particular, potrivit pentru meseria ei, aplicându-l la linii sau unghiuri sau numere sau alte mărimi nu întrucât acestea «sunt» ci întrucât ele sunt un continuu cu una, două sau trei dimensiuni. Filosofia, din contră, nu se preocupă de cazuri particulare, după care fiecăruia din aceste obiecte i se atribuie ceva, ci ea studiază felul în care fiecare dintre aceste obiecte «există». Filosofia tratează despre ce este dat întrucât există, pe când ştiinţele, inclusiv matematica, pot fi considerate «cel mult ca domenii parţiale ale înţelepciunii»".

Relaţia dintre matematică şi filosofie este văzută de Aristotel astfel: matematica este ştiinţa teoretică, parte a ştiinţei, în timp ce filosofia cuprinde totalitatea ştiinţei. Aristotel [2] precizează competenţele ştiinţelor, în particular competenţa matematicii, şi rolul filosofiei ca ştiinţă primă fundamentală: „S-ar mai putea pune întrebarea dacă cea mai înaltă ştiinţă nu este şi generală şi dacă nu cumva şi ea tratează despre un anumit gen şi o anumită esenţă. Dar nici în matematică nu este peste tot la fel, geometria şi astronomia studiind fiecare mai degrabă câte un domeniu special, dar matematica generală este fundamentul comun al tuturor. Dacă n-ar exista nici o altă substanţă decât aceea pe care o întâlnim în natură, atunci fizica ar fi cea mai înaltă ştiinţă. Dar există însă o ştiinţă primă despre ea, şi aceasta este generală tocmai pentru că este cea mai înaltă. Şi ei îi revine să trateze despre existent ca atare, despre natura sa şi despre ceea ce decurge din faptul că «există»".

2.10. TEORIA ARISTOTELICĂ A ŞTIINŢEI

Aristotel a avut o concepţie elaborată şi consistentă despre ştiinţă, remarcă Hintikka [2], şi care nu poate fi disociată de teoria sa silogistică, cunoscut fiind faptul că pentru Stagirit silogismul era instrumentul universal producător de ştiinţă.

Examinarea structurii teoriei aristotelice se dovedeşte relevantă pentru concepţia sa despre ştiinţă. Pare convingător să crezi că remarcile aristotelice despre ştiinţă se obţin ca nişte consecinţe ale propriei sale

teorii silogistice. Esențialul teoriei silogistice constă în reducerea tuturor figurilor la figura întâi, considerată de Patzig [1] conformă conceptului aristotelic de silogism perfect, ceea ce se întemeiază pe *tranzitivitatea incluziunilor*, fapt menționat expres de Aristotel [1]: „premisele din care tragem concluzia stau între ele în raport de la întreg la parte". În acest sens, explicațiile aristotelice (în știință) se reduc la evidențierea incluziunilor în clase, utilizându-se tranzitivitatea acestor relații. Hintikka [2] notează că procedeul constă în inserarea termenilor intermediari între cei ai căror conexiune urmează să fie explicată. Formularea lui Aristotel [1] este: „o concluzie este demonstrată prin interpunerea unui termen, nu prin adăugarea unui termen extern". Inferențele științifice iau forma unui șir suprapus de termeni, fiecare dintre aceștia aplicându-se predecesorului său imediat formând o premisă silogistică, cf. Hintikka [2]. Se obține în acest mod rezultatul: „în demonstrație nu putem trece de la un gen la altul" (Aristotel [1]), pentru că termenii care se interpun, cum am văzut, vor avea sfera mai îngustă decât cea a termenului predicat care figurează în ultima premisă silogistică care caracterizează „genul" și la care se referă silogismele științei respective. Modelul silogistic produce replici în teoria științei, adică clase de ingredienți (presupoziții). Întrucât interpolarea de termeni, amintită mai sus, „nu se poate extinde la infinit, există o clasă de premise ce asertează despre *legături imediate* între termeni; aceste presupoziții fundamentale sunt numite de Hintikka *premise despre legăturile atomare*, și ne dau caracteristica distinctivă a subiectului lor, sau, altfel spus, definiția termenului subiect. Aristotel [1] afirmă că „principiile demonstrației sunt definiții". Legăturile atomare sunt bazate pe definiții, ceea ce, în interpretarea lui Hintikka [2], marchează un element puternic conceptual, în structura științei aristotelice, căci șirul crescător de silogisme științifice imediate au valoarea unor „relatări despre ce ar trebui definit un termen în vederea obținerii unei cunoașteri exhaustive a faptelor relevante". Mai explicit, această clasă de presupoziții relevă semnificația atributelor aparținând genului care constituie obiectul științei.

O a doua clasă de presupoziții fundamentale ale unei științe sugerate de teoria silogistică aristotelică, derivate din înseşi principiile demonstrației silogistice (apodeixis), cu care operează orice știință şi despre care discută Aristotel [1,] include *principii logice*, cum sunt legile contradicției şi tertiului exclus (numite de el principii ale silogismului) şi principii matematice (ca de exemplu: „cantități egale scăzute din cantități egale dau resturi egale" – vezi Aristotel [1] şi despre ele a spus Aristotel [2] că țin de competența *„Primei filosofii"* (metafizica). Hintikka propune să le numim *„axiome comune"*.

Aristotel discutând despre acest tip de presupoziții afirmă că „există necesar prin sine şi trebuie crezute cu necesitate ca adevărate". Beth [1, p. 33] scrie că metafizica sau *„Prima filosofie"* în concepția lui Aristotel desemna ceea ce azi e cunoscut ca *„cercetarea fundațională"*. Investigațiile au arătat că termenul a avut la Aristotel o accepție restrânsă – neacoperind programul anunțat inițial – metafizica devenind cercetare a principiilor fizicii. Familiarizat cu cercetările matematicienilor Eudoxus şi Theatet (elevi ai lui Platon), Aristotel considera că era greu să se spună ceva nou în acest domeniu (al matematicii). Fiind de acord cu rezultatele celor doi discipoli ai lui Platon, el era mulțumit să dea matematica ca exemplu tipic de știință deductivă şi atunci a abordat fundamentele fizicii, despre care Parmenide şi Platon afirmau că nu va fi niciodată posibilă o știință deductivă a mişcării şi a schimbării. Oricum, Aristotel era convins de importanța impactului matematicii asupra filosofiei, încât în *„Metafizica"* arată că ideea metafizicii ca o ontologie generală i-a fost sugerată de „teoria proporțiilor" a lui Eudoxus pe care o numea *„matematica universală"*.

Distingem, după Aristotel, în structura științei şi o a treia clasă de presupoziții fundamentale, numite de Hintikka în studiul citat *premise generice* (sau cele mai generale premise ale unei științe particulare) şi care sunt relative (vezi Aristotel [1]) la ceea ce știința respectivă pune de la început ca existent (adică genul ale cărui atribute esențiale ea le examinează). Aceste premise înalte din cadrul şirurilor de silogisme științifice nu explică termenii mai restrânşi pe care îi conține, ci ne oferă

o definiție a termenilor lor subiect, care fiind foarte largi definesc genul sau obiectul la care se referă științele respective; premisele generice transportă sensul existențial al științei. Desigur, nu se formulează presupoziția existențială în mod separat pentru fiecare premisă imediată, transportul existențial făcându-se de la termenii mai largi la cei mai restrânși într-un șir de silogisme științifice. Se formulează o singură presupoziție existențială care se referă la existența membrilor genului ce constituie obiectul științei respective; demonstrația silogistică este vehiculul care transportă semnificația existențială în jos de la premisele generice. Aristotel [1] scrie: „susținem că prin demonstrație (apodexis) trebuie să dovedim existența a orice – afară de existența substanței... Urmează că existența va fi obiect de demonstrație. Așa procedează de fapt științele". Semnificația premiselor generice este centrală în epistemologia aristotelică, căci orice știință trebuie să poarte asupra unui obiect, și, dacă înțelegem bine interpretarea lui Hintikka [2, p. 264], importanța forței existențiale a premiselor silogistice, insuficient explicată prin apelul la concepția aristotelică despre silogism, își are rădăcini în gândirea sa epistemologică, (chiar dacă a fost centrată pe un realism sistematic și static și pentru care Piaget [1, p. 80] a formulat critici), exprimată suficient de clar în pasajul: „distrugerea a ceea ce este cunoscut duce cunoașterea la distrugere... Pentru că dacă nu ar fi ceva cunoscut nu ar fi nici o cunoaștere, n-ar mai fi nimic despre care să cunoaștem" (Aristotel [6]).

Definițiile nominale constituie a patra clasă de presupoziții ale unei științe anumite. Semnificația acestor presupoziții nu pare suficient de clară comentatorilor lui Aristotel. Poate că interpretarea lor ca fiind teze sau precizări ale conținutului, dar nu ipoteze (deoarece trebuie să distingem între *definiția unității* pe care o dă matematicianul și *existența unității*), pare adecvată textului aristotelic; definițiile n-au forța asertivă și deci li se contestă orice *conținut existențial*.

În Aristotel [1] găsim următoarea formulare dată „*științei demonstrative*" (cf. Hintikka [2, p. 270–271]): „Orice știință demonstrativă presupune trei elemente: 1) ceea ce se pune la început ca existent (adică

genul ale cărui atribute esențiale ea le examinează)(tipul II de presupoziții); 2) aşa-numitele axiome, care sunt premisele prime ale demonstrației sale (tipul I de presupoziții îl constituie axiomele comune); 3) atributele al căror înțeles îl acceptă ştiința (atributele presupuse că formează presupoziții de tipul III); definițiile – adică cele care nu exprimă că ceva este ori nu este – nu sunt ipoteze (presupoziții IV).

Beth [1, p. 31–32] arată că aspectele esențiale ale teoriei aristotelice a ştiinței pot fi sumarizate în următoarea definiție a termenului de *ştiință deductivă* (apodictica, în terminologia lui Aristotel). O ştiință deductivă se defineşte ca fiind un sistem de prepoziții S ce satisfac postulatele următoare:

I (*postulatul de realitate).* Orice propoziție care aparține lui S trebuie să se refere la un domeniu anumit de entități reale;

II (*postulatul de adevăr*). orice propoziție a sistemului S trebuie să fie adevărată.

III (*postulatul de deductivitate).* Dacă anumite propoziții aparțin sistemului S, atunci orice consecință logică a acestora aparține, de asemenea sistemului S.

Următoarele două postulate formulează împreună ceea ce s-a numit *postulatul evidenței:*

IV. Există în S un număr (finit) de termeni şi

a) semnificația acestor termeni este evidentă, direct comprehensibilă, fără nici o explicație (termeni *nedefiniți, primitivi);*

b) orice alt termen care apare în sistemul S este definibil invocând aceşti termeni din grupa termenilor primitivi; termenii astfel introduşi se numesc termeni *definiți.*

V. Există în sistemul S un număr finit de propoziții astfel că

a) adevărul lor fiind aşa de evident nu cere demonstrație;

b) adevărul oricărei alte propoziții din sistemul S se stabileşte cu ajutorul inferenței logice din aceste propoziții.

Structura teoriilor din matematică a beneficiat, cum se vede, de o atenție remarcabilă din partea lui Aristotel, comparativ cu opera lui Platon, în această privință; se poate spune că Aristotel a produs enorm

în planul metodologiei construirii teoriilor matematice, opera sa având sub acest aspect o pregnantă actualitate. Într-o reformulare sintetică a unor lucruri spuse aici şi adaptate matematicii observăm: o distincție între *principii comune* tuturor ştiințelor (în terminologie actuală, principiile logicii formale pe care le presupun formularea şi dezvoltarea deductivă a oricărei ştiințe) şi *principii speciale* presupuse de matematică în demonstrație; *definiții* care nu angajează existența a ceea ce este definit (vezi definiția euclidiană a punctului); *ipoteze existențiale* care presupun că ceea ce a fost definit există independent de percepția şi gândirea noastră, ipoteze, se pare, de care matematica pură se poate dispensa.

Remarci

Teoria ştiinței a lui Aristotel poate fi rezumată astfel: orice ştiință bine construită se caracterizează prin: i) *o structură deductivă* (ceea ce a fost reținut în *postulatul de deductivitate*); ii) posedă *principii* acceptate ca *autoevidente*, ceea ce a fost formulat ca *postulatul evidenței*; iii) are o *fundare empirică* (conform *postulatului de realitate*).

Dezvoltarea ştiinței a pus în evidență neconformarea ei la exigențele teoriei aristotelice a ştiinței. Evoluția modernă a ştiinței a generat cele două tipuri de ştiințe: raționale şi empirice, cărora li s-au asociat două doctrine – curente rivale, raționalismul (Descartes) şi empirismul (Locke), primul susținînd primul tip de ştiință, întrucât acestea din urmă satisfăceau postulatele de fundare (i) şi (ii), în timp ce a doua orientare a preferat ştiința empirică care este comformă postulatul fundării empirice. Încercări de reconciliere a raționalismului şi empirismului au făcut Nieuwentyt şi Leibniz. După Beth [1] tentativa kantiană a *„reabilitării"* sau, poate, a *„restaurării" teoriei unitare a ştiinței*, aşa cum a elaborat-o Aristotel (o ştiință care să îndeplinească simultan cerințele (i), (ii), (iii), anterior enunțate) a eşuat, căci ştiința modernă s-a îndepărtat tot mai mult de postulatul evidenței, central în concepția aristotelică şi relevant pentru axiomatica vechilor greci. Această mişcare a ştiinței – îndepărtarea de cerința evidenței – a fost profund marcată de apariția geometriilor neeuclidiene; ulterior, şcoli de prestigiu în domeniul fundamentelor

logicii şi matematicii – logicismul, formalismul şi intuiționismul – au eşuat în perseverența lor de a menține postulatele deductivității şi evidenței. Mai ales în fizică s-au încercat rectificări drastice pentru a obține o „*atenuare*" a postulatului de *realitate*, recurgându-se la construirea unor teorii deductive adecvate. Teoriile fizice moderne nu mai respectă postulatul existenței (se foloseşte un alt tip de axiomatizare al cărei nucleu constă în axiome-ipoteze (vezi şi Gonseth [2]); iar fizica cuantică a revizuit suficient de semnificativ, observă Beth [1], postulatul deductivității, desigur, „conflictele conceptuale" (mai exact, *fundaționale)* dintre dezvoltarea modernă a ştiinței (marcată de geometriile ne-euclideene, teoria relativității „fizica cuantică, fizica modernă) şi teoria aristotelică a ştiinței au provocat protestele aşa-numiților filosofi „speculativi" care au crezut în infailibilitatea doctrinei aristotelice. Dacă coerența acestei doctrine a fost afectată de ineditele situații conceptuale apărute în evoluția istorică a cunoaşterii, oricum valoarea ei se regăseşte în tradiția creată, în inspirațiile şi stimulările cunoaşterii ştiințifice, cum şi în rezonanța actuală în discuțiile filosofice, curente din domeniul fundamentelor generale ale acestei cunoaşteri.

Critica operei lui Aristotel în acest domeniu a făcut-o însăşi evoluția social-istorică a cunoaşterii, faptul că filosoful antic n-a ajuns la un constructivism dialectic în cunoaştere (vezi Piaget [1, p. 80]) constituie o limită generală a perioadei filosofiei şi gândirii greceşti din istoria culturii umane.

CAPITOLUL III

FILOSOFIA MODERNĂ A MATEMATICII

3.1. PROFIL STILISTIC AL MATEMATICII OCCIDENTALE

Istoric, matematica a apărut sub forma ei nativă ca *„știință a numerelor" (aritmetică)* şi ca studiu al *figurilor* percepute intuitiv (puncte, segmente, drepte, plane în spațiu, unghiuri, triunghiuri, cercuri etc.), ceea ce numim *geometrie*. Aşadar, *entitățile matematice* fundamentale specifice matematicii vechi, practicată încă de babilonieni şi egipteni, erau *numărul* şi *figura*, ale căror domenii s-au dezvoltat în directă conexiune cu conceptul de *măsurare*, cu efecte practice remarcabile în astronomie – la popoarele amintite – este vorba de calculul eclipselor de lună şi altele.

Dezvoltarea matematicii cunoaşte o înflorire la vechii greci care realizează saltul de la *empiric* la *intelectual* (deductiv), contribuind, astfel, la ceea ce s-a spus, că matematica a devenit o ştiință în sensul acceptat al zilelor noastre şi acest fapt s-a datorat, cum observa Hans Reichardt [1, p. 9], identificării acestor doi ingredienți semnificativi în actul de *a face matematică*: stabilirea unor *realități fundamentale* (ex.: prin două puncte trece o dreaptă şi numai una) şi a unor *fundamente* (*conexiuni*) *logice;* grație acestor două elemente, geometria a fost construită sistematic şi deuctiv, devenind model al ştiinței.

Este, dacă nu straniu, atunci cel puțin de neînțeles, de ce matematicienii din Grecia antică nu au depus eforturi asemănătoare în direcția construirii în aceeaşi măsură a algebrei şi, ulterior, a analizei – fiicele moştenitoare ale aritmeticii numerelor. Au rămas la fracții obişnuite, dar nu au introdus numerele negative, iar în studiul relației dintre catetă şi ipotenuză s-au mulțumit să constate că nu este exprimabilă printr-o fracție. În loc să procedeze la extinderea domeniului fracțiilor, pentru a-l face apt să exprime asemenea şi alte relații geometrice, ei au procedat invers şi anume „au geometrizat algebra", rezultat asimilat drept o teorie echivalentă cu teoria numerelor reale, dar prin geometrizare, însoțit de enorme complicații, observă autorul german citat. Un rezultat cert s-a obținut totuşi: blocarea dezvoltării matematicii.

Dar, calculele trigonometrice impuse de astronomie şi navigație au propulsat trecerea matematicii de la fracții ordinare la fracții zecimale, acestea cu un număr finit de zecimale s-au dovedit mai adecvate decât cele ordinare. Îşi făcea loc sentimentul „că printr-un număr suficient de zecimale se poate obține orice exactitate dinainte stabilită. Prin aceasta, s-a pătruns adânc în însăşi esența numerelor reale şi s-a putut vorbi chiar despre fracții zecimale cu un număr infinit de zecimale. Dacă teoria acestor numere s-ar fi construit în mod consecvent, s-ar fi putut obține chiar atunci o teorie consistentă a numerelor reale" (Hans Reichardt [1, p. 9]). O asemenea interpretare o identificăm la Arhimede – el a reuşit prin celebra sa *metodă exhaustivă* să calculeze exact aria mărginită de o porțiune de parabolă şi de o coardă, numărul fiind 1/3, dar nu a găsit un rezultat asemănător pentru aria cercului (πr^2), caz în care a trebuit să calculeze numărul π, lucru pe care nu-l putea face numai cu fracțiile. Oricum, el era conştient că π putea fi situat între limite din ce în ce mai strânse şi că putea fi calculat cu o exactitate dinainte dată, dacă numărul laturilor poligoanelor înscrise şi circumscrise este suficient de mare. Şi Hans Reichardt comentează: „Această posibilitate de a exprima cu o exactitate dată un număr prin fracții constituie însăşi esența numerelor reale".

Matematica grecilor (vechi) este desigur *premisă* pentru matematica occidentală modernă, dar în interpretarea noastră nu am

inclus-o în aceasta din urmă, şi asta numai din punct de vedere cronologic, şi poate că cei care au creat matematica modernă aparţin şi ei geografiei occidentului. Am evocat-o, însă, pentru ca să vedem stadiul evoluţiei matematicii la sfârşitul antichităţii şi apoi pentru faptul că trăsăturile stilistice ale matematicii europene occidentale dobândesc pregnanţă, atunci când procedăm la un studiu comparativ, în care luăm ca referinţă matematica elină antică.

Aşadar, e quasi-unanim admis că în esenţă actul matematic are de-a face cu *numere* şi *figuri* (*geometrice*). Sfârşitul antichităţii a fost marcat de şocanta *antisimetrie* «număr-figură geometrică», intuiţie aritmetică (pitagoreică)-intuiţie geometrică (euclidiano-platoniciană), care a culminat cu „detronarea" primeia şi triumful celei de-a doua. Poate că aceasta este cea mai marcantă caracteristică stilistică („tehnic" şi intelectual-filosofică) specifică matematicii greceşti antice. Studiul istoriei matematicii induce observaţia, reţinută în filosofia matematicii, că evoluţia şi progresul matematicii au subiacentă această alternanţă *număr-figură* (geometrică), propulsiille intrinseci domeniilor acestora având efecte semnificative şi adesea revoluţionare – tehnic şi intelectual – asupra dezvoltării matematicii şi nu numai; aceasta deoarece au influenţat în chip major şi filosofia matematicii, un aspect evident atunci când se poartă discuţia nu atât asupra problemei construirii edificiului matematicii, ci mai curând când este vizată problema naturii matematicii. În filosofia matematicii, sfârşitul antichităţii greceşti a stat sub semnul „victoriei" şi „triumfului" platonismului, dar şi al eşecului pitagoreismului, deşi paradoxal, acesta a reprezentat, cum se ştie, un „ingredient-izvor" al platonismului. Această observaţie o bazăm pe o anume interpretare, uşor restrictivă, a platonismului, şi anume, dacă identificăm termenul „figură" (geometrică) cu „esenţă" platoniciană şi lăsăm tacită asumpţia că într-un domeniu al realului matematic (în sens platonician) figurează şi numerele (lui Pitagora).

Alternanţa amintită *număr-figură* (geometrică) ne dă seamă de întregul contur stilistic al matematicii occidentale. Matematica occidentală a stat iniţial sub impactul datorat ofensivei *numerelor*, prin

trecerea treptată de la *cunoaşterea intuitivă a esenţei numerelor reale* (întâmplată cu mult înaintea fundamentării calculului diferenţial şi integral de către Leibniz şi Newton şi chiar a reprezentării prin coordonate a punctelor planului şi spaţiului în geometria diferenţială (analitică) a lui Descartes, cunoaştere continuată de Bernoulli, Euler, Fermat, Cauchy, Gauss şi alţii, când, de fapt, toţi aceşti matematicieni deşi se ocupau de fundamentele teoriei numerelor reale nu conştientizau acest fapt), la *fundamentarea ei teoretică*. Amintim câteva evenimente care au împins intrinsec şi irevocabil spre autentice clarificări fundaţionale în teoria numerelor. Mai întâi, expresia $\sqrt{-1}$, aparent lipsită de semnificaţie, obţinută în tentative de rezolvare a ecuaţiei de gradul trei; dar s-a observat repede rostul ei legitim în calcule, la fel cu cel al expresiilor $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{\pi}$, care duc la rezultate rezonabile, adică legitime matematic, fapt ce a condus la întărirea convingerii în „*cetăţenia matematicii*" a simbolului i. Gauss, peste 300 de ani, are intuiţia că numerele reale trebuie să-şi extindă domeniul pentru a-l putea cuprinde pe acest „*locuitor ciudat*", am zice noi, şi l-am numit pe i, adică $\sqrt{-1}$, al cărui pătrat este, deci, -1. Dar, chiar şi Gauss proceda ca în epocă, adică opera cu numere reale, ca şi cum ele ar fi nişte entităţi matematice cu statut clar definit. Şi, în consecinţă, matematicienii nu-şi puneau în mod explicit *problema fundării* teoriei numerelor reale. Însă alte evenimente, precum cele legate de dificultăţile cu care s-a confruntat Cauchy privind clarificarea noţiunii de limită, au generat o problematică care punea la ordinea zilei „fundarea teoretică" a numerelor reale.

Sintetic vorbind, (deoarece în capitolele anterioare consacrate acestui subiect ne-am referit *in extenso*), s-a observat că toate modurile de fundamentare trimit la fracţii care, în ultimă instanţă, sunt reductibile la numere naturale. Urma că este suficient să studiem mulţimea numerelor naturale, ale căror proprietăţi sunt fixate în ceea ce este cunoscut ca fiind *axiomele lui Peano*. Reducerea la *numere naturale* a însemnat

punerea bazelor teoretice ale numerelor reale şi complexe, în ultimă instanță bazele analizei reale şi complexe (calculul diferențial, ecuațiile diferențiale, calculul variațional, teoria funcțiilor şi altele) şi chiar ale geometriei, deoarece geometria analitică reprezentând noțiunile sale fundamentale (în primul rând punctele) în termenii coordonatelor (iar acestea sunt numere reale), confirma ideea că geometria are ca fundament teoria numerelor reale.

O descoperire singulară, care a inaugurat o perspectivă, de asemenea, singulară şi revoluționară în matematică, a fost *teoria grupurilor* (E. Galois), care are ca premise ingredienți complexi – care vin dinspre teoria numerelor (*reguli ale operațiilor cu numere*), dar şi dinspre logică, deoarece angajează şi *procese logice* aplicate acestor proprietăți fundamentale ale operațiilor cu numere, însă şi a altor operații matematice, ca de exemplu, compunerea mişcărilor şi/sau a permutărilor. Pe această cale s-a produs obținerea unor proprietăți mai complexe şi mai profunde, ridicând astfel abstracția matematică la un nivel superior. Oricum, prin impactul produs de opera lui Galois, algebra a intrat într-o autentică fază modernă a evoluției sale, dovedind că este o disciplină care studiază ceea ce numim *structuri algebrice*. Se acreditează, în acest context, că ideea de *grup* are un loc de *onoare*, fiind cea mai *universală* din întreaga matematică contemporană; se recunoaşte, de asemenea, rolul superior şi fecund pe care *grupurile* îl joacă în toate teoriile matematice; astăzi, cele mai spectaculare cuceriri-aplicații le poartă algebra modernă în topologie (algebrică) şi în geometria algebrică şi care au făcut ca matematica să iasă din făgaşul ei tradițional.

Dar, perspectiva radicală-intern matematică, introdusă de noțiunea de *grup*, adică ceea ce numim *matematica structurilor* relevant reținută ca idee centrală în manifestul şcolii Bourbaki [1] [2], s-a constituit în conexiune directă cu *modul axiomatic de gândire*, prin excelență un *fecund mod de gândire* matematică, o particularitate stilistică a matematicii occidentale a secolului XX.

Modul structural de gândire matematic – inextricabil conexat modului de gândire matematic, deşi se originează în matematica de*tradiţie numerică*, dar care asumă, însă, şi *procese logice* (ce vin explicit dinspre logică!) – aduce noutăţi radicale în ontologia matematicii. Printre locuitorii domeniului matematic vom găsi alături de *numere* şi *figuri*, acestea din urmă reductibile, în analiza finală, la numere, „intruşi" ca *relaţii* şi/sau *structuri* noutatea remarcabilă constând în „tranziţia" de la *cantitativ* (matematica aritmetică, în sens general, ca ştiinţă a cantităţilor) la *calitativ* (matematica structurilor algebrice, de ordine, topologice).

Amprenta axiomatică a *modului de gândire matematic* se învederează nu numai în prezenţa *teoriei structurilor*, ci şi în apariţia, constituirea geometriilor neeuclidiene, despre care s-a spus, comparativ cu teoria funcţiilor cu variabile complexe, că „dacă aceasta reprezintă din punct de vedere „*tehnic*" cea mai semnificativă creaţie în matematică, ele (geometriile neeuclidiene) constituie din punct de vedere *intelectual* cea mai importantă descoperire", cu efecte revoluţionare referitor la natura matematicii. Aşadar, iarăşi *numere* şi *figuri* cu rol dominant în aceste două teorii şi cu semnificaţii fundamentale pentru destinul matematicii.

Tendinţa axiomatică s-a dovedit fecundă şi într-o celebră teorie, *cea a mulţimilor*, unde a condus la constituirea unei ultrarăspândite paradigme de gândire, cea set-teoretică sau ansamblistă, cea mai fecundă şi eficientă perspectivă de fundare a matematicii şi care a conferit o aură *sui gentris* profilului stilistic al matematicii contemporane.

În fine, o notă caracteristică a profilului stilistic al matematicii actuale o reprezintă *matematica computerială*, încât impactul revoluţionar al computerelor asupra matematicii a condus la un nou stil de gândire în matematică şi chiar la o nouă paradigmă în această ştiinţă, o nouă relaţie intuitiv şi simbolic, o relansare a ideilor lui Leibniz despre matematica computaţională, o nouă noţiune de demonstraţie, o regândire a statutului matematicii.

3.2. DEMERSUL CARTEZIAN ÎN METODOLOGIA ŞTIINȚEI

Programul euclidian antic sau clasic în metodologia cunoaşterii ştiinţifice a avut în mod esenţial un caracter anti-empirist, propoziţiile indubitabile fiind garantate de o intuiţie infailibilă a intelectului. Faptele vor fi demonstrate invocând principiile indubitabile şi definiţii. Cu aceste „componente" se constituie cadrul de funcţionare al metodei analizei şi sintezei.

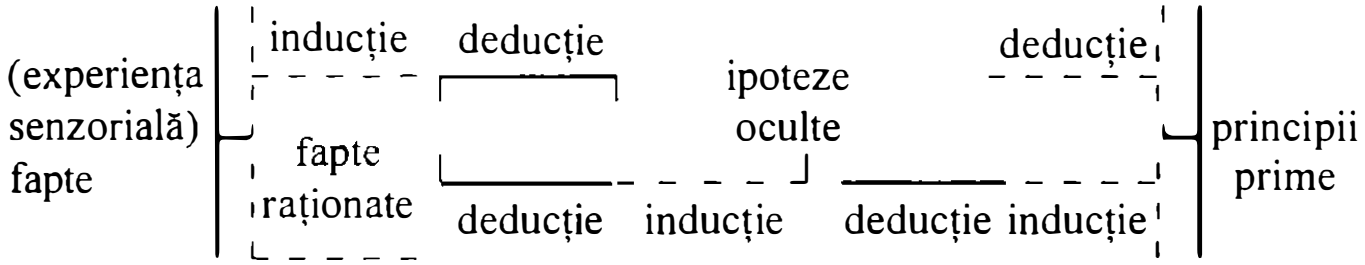
Ştiinţa modernă a adăugat la schema euclidiană doi factori: i) *faptele raţionate* (reasoned facts) şi ii) *ipotezele oculte*, ca de exemplu: toate corpurile se atrag reciproc, un fel de propoziţie dubitabilă. Metoda analizei şi sintezei leagă într-un circuit deductiv cunoscutul şi necunoscutul, un circuit al transmiterii adevărului şi/sau falsului, un fel de sistem „*circulator*" care vehiculează adevărul sau falsul „injectate" la intrarea în acest cadru. Dificultăţile „circulatorii" în sistemul metodologic antic al cunoaşterii, numit şi *circuitul poppusian*, sunt generate la nivelul ştiinţei moderne de prezenţa celor doi ingredienţi: faptele raţionate şi ipotezele oculte. Astfel, faptele şi faptele raţionate nu sunt conectate deductiv, iar faptele raţionate nu implică direct ipoteze oculte, deşi implicaţia în direcţie opusă, de la ipoteze oculte la fapte raţionate, poate fi autentică.

Idealul infailibismului ştiinţific presupune circulaţia liberă a valorii de adevăr de la fapte la fapte raţionate, de la fapte raţionate la ipoteze oculte, de la ipoteze oculte la primele principii, ca şi restituirea viceversei.

Circuitul cartezian, mai compolex decât cel pappusian, căci comportă trei feluri de enunţuri care au certitudine, introduce un gen de inferenţă inductivă care transferă adevărul. Acest circuit s-a constituit din încercarea lui Descartes de a adapta analiza şi sinteza clasică la ştiinţa modernă, rezultatul fiind, evident, o versiune extinsă a circuitului pappusian, de care se distinge prin unele aspecte precum: conţine enunţuri fundamentale quasi-empirice, inferenţe deductive, dar şi inferenţe inductive prin care valoarea de adevăr este „injectată" şi vehiculată în

circuit ca într-un autentic „*sistem circulator*", fără ca unul dintre aceşti ingredienţi să fie privilegiat ca rol şi mai ales să aibe competenţă luat în mod izolat. Concepţia cartezianã este incompatibilă cu absolutizările, indiferent cine le-ar formula, circuitul modern nefiind nici empirist, nici raţionalist, căci nu trebuie acceptată în exclusivitate autoritatea simţurilor, care situează „injectarea" valorii de adevăr la nivelul enunţurilor factuale, dar nici autoritatea intelectului care ar plasa inserţia adevărului în circuit la nivelul primelor principii. Descartes, Newton, Leibniz sunt primii care au sesizat că nu se poate vorbi despre enunţuri factuale adevărate sau principii prime adevărate luate izolat, ci trebuie considerate doar candidaţi pentru adevăr şi fals şi numai încorporate în sistemul circulator al analizei şi sintezei, „în afara acestuia orice enunţ, chiar fundamental, este lipsit de semnificaţie, interpretează Lakatos [2] spiritul noii situaţii conceptual-metodologice la care au contribuit menţionaţii corifei ai ştiinţei moderne.

Diagrama următoare reprezintă ceea ce s-a numit „*circuitul cartezian*":



Descartes şi Newton au respins anticiparea neîntemeiată a primelor principii, care neglijează sau ignoră faptele, subliniind explicit necesitatea analizei laborioase care să pornească de la fapte şi prin cauze mediatoare să parvină la principii. Sloganul newtonian: „*hypothesis non fingo*" era un avertisment împotriva extravaganţelor construcţiilor filosofice speculative şi încorporarea ipotezelor în circuitul cartezian le destituie de aura speculativă peiorativă, făcându-le să-şi modifice fundamental statutul lor. căci, scopul *circuitului cartezian* este să poarte adevărul în toate punctele lui „nodale", iar efectul este tocmai, între altele, transformarea ipotezelor în fapte, să justifice idealul aristotelic al unei ştiinţe cu

certitudine apodictică, de fapt să ferească demnitatea ştiinţei infailibile de fantezii indezirabile.

Descartes şi Newton au statuat ca o regulă absolută faptul că lanţul deductiv porneşte de la fapte. Newton [1] spune textual: „Ca în matematică aşa şi în filosofia naturală investigarea lucrurilor dificile prin metoda analizei trebuie să preceadă metoda compunerii". O atitudine similară condensează regulile a cincea şi a patra din Descartes [1]. Dar, dacă atât Descartes, cât şi Newton contestă uzul principiilor prime, când sunt izolate de circuit, ei le concep. însă, ca o parte esenţială a circuitului, ca o structură epistemologică relevantă, la a cărei securitate contribuie, în absenţa cărora s-ar proceda la o „*construire fără fundare*", ca în cazul lui Galilei, criticat pentru omiterea principiilor prime.

Inducţia şi deducţia sunt ambele prezente în circuitul cartezian şi sunt bazate pe intuiţie, transmiţând adevărul de la premise la concluzii şi falsul de la concluzii la premise; inferenţa inductivă este distinctă de simpla conjecturare falibilă şi are un rol important în obţinerea propoziţiilor generale. Newton [2] scrie: „Orice care nu este dedus din fenomene trebuie să fie numit o ipoteză, şi ipotezele de acest fel, metafizice, sau fizice, despre calităţi oculte sau mecanice, n-au ce căuta în filosofia experimentală. În această filosofie propoziţiile sunt deduse din fenomene şi făcute generale prin inducţie". Descartes substituie deducţiei silogistice deducţia intuitivă, a cărei infailibilitate şi complexitate este garantată de Dumnezeu. Dar atunci, se întreabă Descartes [1], de ce nu ar garanta Dumnezeu şi inferenţa inductivă? Iar în virtutea acestei argumentări, inducţia şi deducţia sunt plasate epistemologic la acelaşi nivel.

Astăzi, atât circuitul pappusian, cât şi cel cartezian au fost date uitării; Lakatos [2] notează că ultimul filosof care a luat în serios circuitul pappusian a fost J. M. C. Duhamel şi care a considerat metoda anticilor ca fiind depăşită, raportată la evoluţiile recente ale ştiinţei. Metoda ştiinţei moderne nu mai este cea a analizei, ci cea reductivă, care asigură investigaţia propoziţiei în discuţie, înaintând spre propoziţiile din care aceasta decurge, până identificăm o propoziţie indubitabil adevărată;

dar, procedând astfel, Duhamel rămâne încă un cartezian. În acest pattern, sinteza este dată odată cu analiza, orice analiză putând fi convertibilă în sinteză. Metoda antică şi-o mai amintesc studenţii cu ocazia studierii istoriei geometriei. Cornford argumentează că analiza pappusiană este identică cu ceea ce Duhamel a numit analiză reductivă modernă şi a conchis că oricine a interpretat deductiv pe Pappus a greşit lamentabil.

Pentru Descartes, oricum, nu numai sinteza, ci şi analiza a avut relevanţă epistemologică şi el a gândit că sursa şi garanţia adevărului este circuitul ca întreg (cf. Lakatos [2]). Continuitatea dintre Pappus şi Descartes îi sugerează lui Lakatos [2] o analiză centrată pe câteva întrebări: 1) analiza-sinteză carteziană îşi are originile în circuitul pappusian? Sau această conexiune este numai o reconstrucţie raţională?; 2) Este circuitul cartezian o descriere factuală a ideilor carteziene sau, iarăşi, numai o reconstrucţie raţională a acestor idei?

Prezentarea lui Lakatos este, după cum el însuşi declară, una raţional reconstruită, căci a observat conexiunea obiectivă şi dezvoltarea ideilor şi nu a investigat modul neîndemânatic în care ele au devenit conştientizate sau semi-conştientizate de minţi subiective. Descartes şi contemporanii lui au fost conştienţi că ei au revizuit tradiţia pappusiană prin tentativa adaptării ei la ştiinţa modernă.

Intenţia lui Descartes era să gândească o metodă de descoperire a cunoaşterii infailibile, o euristică infailibilă; ori, pentru el modelul cunoaşterii infailibile era geometria euclidiană, iar singura metodă disponibil relevantă de descoperire era oferită de circuitul pappusian. Programul cartezian ţintea să realizeze logica descoperirii matematicii euclidiene în toate domeniile cunoaşterii umane şi regula a IV-a (Descartes [1]) enunţa necesitatea euristicii ca şi convingerea sa în rolul intuiţiei şi deducţiei, ce ne direcţionează spre cunoaşterea infailibilă, quasi-divină; şi în căutarea predecesorilor metodei apreciată de el dezirabilă, incursiunea ajunge în spaţiul matematicii şi filosofiei elene, un prilej în care el subapreciază manifest logica lui Aristotel care, cum vom vedea ulterior, o va găsi inoperantă în analiza naturii raţionamentului matematic.

Descartes [2] se referă la geometrii antici care au făcut uz de o anumită analiză, pe care au extins-o la rezolvarea tuturor problemelor, apoi arată că în vremea lui se dezvolta „un fel de aritmetică numită algebră", având de-a face cu numere, întocmai cum anticii aveau de-a face cu figuri geometrice, ceea ce este fructul spontan născut din principiile disciplinelor în cauză – aritmetica şi geometria. Referitor la algebră, el spune că nu este o ramură a matematicii, ci o metodă înrudită cu analiza, algebra fiind prin excelenţă analitică (cf. Descartes [1)]. Dar, patternul cartezian este mai curând unul al rezolvării problemelor decât al demonstraţiei.

Descartes a mărturisit că el a fost preocupat de tainele universului, nu l-au interesat trivialităţile geometriei, studiul matematicii procurându-i doar standardele de auto-evidenţă şi certitudine şi, mai mult, a criticat stilul sintetic propriu euclidianismului, cu efecte sufocante pentru gândire, contrazicând în această privinţă cerinţa lui Platon ca „în «*Academie*» să nu intre cei care nu ştiu geometrie".

3.3. CONCEPŢIA LUI DESCARTES DESPRE NATURA RAŢIONAMENTULUI MATEMATIC

Dacă în filosofia matematicii a lui Aristotel raţionamentul discursiv deţinea rolul central în cunoaşterea matematică, intuiţia având un rol oarecum subordonat, începând cu Descartes şi Kant, se produce o schimbare de accent privind rolurile acestora în favoarea, privilegierea acesteia din urmă.

În concepţia carteziană, noţiunile definibile şi adevărurile demonstrabile sunt derivate direct din intuiţie, fără vreun apel la raţionamentul formal. Demonstraţiile matematice sunt identificate mai curând cu procese actuale de gândire decât cu scheme datorate logicii formale, considerent pentru care Beth [2, p. 12] vorbeşte de *intuiţionismul* lui Descartes. O versiune modernă a „*Elementelor*" lui Euclid nu poate fi redactată sub forma unei succesiuni de silogisme aristotelice, iar o

asemenea aserțiune conduce legitim, după Beth [2, p. 6], la două doctrine incompatibile: i) conform primei doctrine, teoria aristotelică a silogismului nu poate oferi o analiză adecvată şi completă a raționamentului matematic, o astfel de analiză rămânând posibilă atunci când teoria lui Aristotel este înlocuită cu o teorie similară lărgită; ii) după a doua doctrină, analiza raționamentului matematic cere proceduri care diferă esențial de silogism, încât o analiză logică a acestui raționament nu este posibilă nici în cazul că o teorie logică extinsă este disponibilă. Confruntat cu ambele concepții-doctrine, obiectivul examinării naturii raționamentului matematic permite să conchidem imposibilitatea analizării raționamentului matematic în termenii silogisticii tradiționale.

Concepțiile contemporane au reținut ca fiind corectă prima doctrină despre raportul dintre silogism şi raționamentul matematic, deşi mult timp logicienii şi matematicienii au sperat că şi cea de-a doua poate fi acceptată.

R. Descartes [1, p. 38] este cel care a pus explicit problema diferenței dintre raționamentul matematic şi silogismul tradițional, aristotelic, relevând faptul că acesta din urmă pleacă de la premise universale şi deduce o concluzie, de asemenea, universală, în timp ce raționamentul matematic are particularitatea distinctivă de a intercala în structura sa internă o fază intermediară, constând în contemplarea unui obiect individual: „... propozițiile generale sunt formate din cunoaşterea particularilor". (Reply to the second objection). Această fază distinctivă, specifică raționamentului matematic, este produsă, realizată de intuiție. Descartes [1] consemnează acest aspect al inferenței matematice în regula a IV-a: „...această idee comună este transferată de la un subiect la altul, pur şi simplu prin intermediul comparării simple prin care noi afirmăm că obiectul căutat este în această sau în acea privință asemănător, sau identic, sau egal cu un dat particular. În consecință, în orice lanț al raționamentului prin comparare pur şi simplu ajungem la cunoaşterea precisă a adevărului. Un exemplu: toți A sunt B, toți B sunt C şi deci toți A sunt C. Aici comparăm unul cu altul, un *quaesitum* şi un *datum*, viz. A

şi C în privinţa faptului că fiecare este B, şi aşa mai departe. Însă deoarece, cum adeseori am anunţat, formele silogistice nu ne ajută în perceperea adevărului despre obiecte, va fi pentru profitul cititorului să le respingem cu desăvârşire şi să concepem că toată cunoaşterea oarecare, alta decât aceea care constă în intuiţia simplă şi goală a obiectelor singulare independente, este o chestiune de comparare a două sau mai multe lucruri unele cu altele".

Şi vorbind despre intuiţie, Descartes [3], în *meditaţia aV-a*, afirmă că trebuie să fie centrată pe un obiect concret, deşi nematerial: „De exemplu, când noi imaginăm un triunghi, deşi poate să nu existe nicăieri în univers o asemenea figură în afara minţii mele, sau n-a existat vreodată, există totuşi în această figură o anumită natură, formă sau esenţă determinată, care este imuabilă şi eternă, pe care n-am inventat-o, şi care în nici un mod nu depinde de mintea mea, aşa cum apare din faptul că diverse proprietăţi ale acestui triunghi pot fi demonstrate, viz. ca cele trei unghiuri ale lui sunt egale cu două unghiuri drepte, că cea mai mare latură este subîntinsă de cel mai mare unghi, şi altele asemnătoare, care acum indiferent dacă eu doresc sau nu eu recunosc foarte clar că aparţin lui, deşi eu niciodată totuşi n-am gândit conţinutul când am imaginat prima dată triunghiul".

Concepţia carteziană, considerată predominant-intuiţionistă, asumă subiacent un gen de *platonism*, termenii „*natură*", „*formă*", „*esenţă*", cu caracteristicile „imuabilităţii" şi „eternităţii" asociate, sunt relevanţi în acest sens. Însă ceea ce este important pentru analiza raţionamentului matematic rămâne dificultatea cu care se confruntă concepţia lui Descartes pe care, se pare, cum observă Beth [2], el însuşi nu a conştientizat-o: dacă raţionamentul trebuie să poarte asupra unui obiect concret, în cazul anterior de exemplu un triunghi, atunci cum vom putea raţiona despre orice obiect (matematic) oarecare în vedera obţinerii generalizării cerute, care legitimează orice demonstraţie matematică veritabilă? Conform concepţiei lui Descartes, obiectul intuiţiei este *esenţa triunghiului* şi nu orice triunghi oarecare. Conceptul de obiect al intuiţiei (matematice, aici geometrice) – esenţa triunghiului în concepţia

cartezianã – va fi reformulat de John Locke [1] apelând la ideea de *triunghi în general*, căci nu se are în vedere nici triunghiul obtuz, nici triunghiul dreptunghic; nici triunghiul echilateral, nici triunghiul isoscel sau triunghiul scalen. Conceptul cartezian de *esența triunghiului* este de inspirație platonistă, în timp ce cel de *triunghi în general* al lui Locke este incompatibil cu doctrina ideilor înăscute împărtăşită de filosoful francez şi în acord, mai curând cu ontologia de tip conceptualist, remarcă Beth [2, p. 8].

Soluția lui Locke a fost găsită nesatisfăcătoare de Berkeley [1], care se întreabă: „...cum putem şti despre orice propoziție că este adevărată, despre toate triunghiurile particulare, excepție faptul când am demonstrat-o despre ideea abstractă de triunghi cu care toate triunghiurile sunt în acord? Pentru că, deoarece o proprietate poate fi demonstrată pentru un triunghi particular, nu urmează că aparține oricărui alt triunghi, care în toate privințele nu este identic cu el. De exemplu, având că trei unghiuri ale unui triunghi dreptunghiular isoscel sunt egale cu două unghiuri drepte, nu pot infera aceasta ca valabilă pentru toate celelalte triunghiuri, care nu au nici un unghi drept, nici două laturi egale. Pentru a fi siguri că această propoziție este universal adevărată, noi trebuie să facem o demonstrație particulară pentru orice triunghi particular, ceea ce este imposibil, sau s-o demonstrăm odată pentru totdeauna despre *ideea abstractă de triunghi*, la care participă toate triunghiurile particulare şi prin care ele sunt în mod egal reprezentate. La care eu răspund că deşi ideea pe care o am în vedere, în timp ce eu fac demonstrația, va fi aceea a unui triunghi dreptunghiular isoscel, ale cărui laturi sunt de o lungime determinată, eu pot totuşi să fiu sigur că ea se extinde la toate celelalte triunghiuri, de orice fel şi mărime... Este adevărat, diagrama pe care o am în vedere include toți aceşti particulari, dar nu există nici o ultimă mențiune făcută despre ele în demonstrația propoziției".

Beth [2, p. 8] găseşte acceptabilă explicația formulată de Berkeley şi, chiar mai mult, o vede un răspuns posibil satisfăcător la cea de-a doua chestiune din următoarele două care formează problema în discuție: 1) de ce introducem în demonstrația unei propoziții matematice universale o

fază intermediară conexată unui obiect particular (de exemplu, un triunghi)?; 2) cum poate un argument care introduce o asemenea fază să producă o concluzie universală? Dacă Berkeley produce o replică convingătoare la a doua chestiune din cele listate anterior, Descartes a oferit un răspuns plauzibil la prima chestiune. Meritul lui Descartes este că el a observat că raționamentul matematic are o *structură curioasă*, care îl distinge clar de silogism, însă explicațiile date de filosoful francez rămân parțiale, valabilitatea lor circumscriindu-se numai în legătură cu prima problemă din listă. Expresia standard a matematicianului „*Fie ABC un triunghi oarecare*" serveşte ilustrării raționamentului prin apelul la o diagramă concretă. Beth observă că aceasta nu constituie o explicație corectă, satisfăcătoare, deoarece această manieră este prezentă chiar în tratatele de matematică contemporană abstractă, care prin rațiunea lor nu-şi propun asemenea obiective ca ilustrarea prin intermediul diagramelor. Beth crede că Descartes a surprins corect rolul «*fazei intermediare*» în derularea raționamentului matematic şi anume, stimularea intuiției (am adăuga creatoare), ceea ce nu se poate executa decât legat de obiectele particulare; un răspuns acceptabil la prima chestiune. O remarcă din „Meditația a cincea" ar sugera că Descartes a intenționat prin identificarea *triunghiului particular* corelat contemplării intuitive cu *esența triunghiului (triunghiul general*, în terminologia lui Lockey) să ofere un răspuns şi la cea de-a doua chestiune. Interpreții lui Descartes (între care Beth se distinge) au constatat dificultățile inerente doctrinei carteziene în confruntarea cu stările de fapt din matematică, căci este dificil să justifici o concluzie universal aplicabilă plecând de la contemplarea intuitivă a unui anumit triunghi particular mai curând decât a altuia. Premisele unei asemenea conchideri sunt rezultate din „demontarea" demersului cartezian, căci dacă este totuşi dificil să pui de acord rolul unui triunghi particular cu esența triunghiului, odată fiind admis acest lucru, dacă acceptăm însă acest concept, urmează că esența triunghiului fiind un triunghi individual, să fie sau scalenă, sau dreptunghiulară etc. Dar, respingerea concepției despre esența triunghiului ca un triunghi particular antrenează faptul că prima chestiune rămâne deschisă.

Răspunsul lui Berkeley la a doua chestiune este mai degrabă negativ, căci din moment ce proprietățile triunghiului individual nu au rol în demonstrație, ce rațiune mai are introducerea lor?

O asemenea perspectivă a fost aprofundată mai explicit şi cu mai multă claritate de D. Hume [1, part. I], observațiile lui ținând de domeniul mai curând al psihologiei decât al logicii, cu relevanță pentru ceea ce este numit gândirea dialectică. Fenomenul descris de Hume aparține nivelului pre-critic al discuției, adică al discuției neformale dintre, să spunem, doi matematicieni angajați într-o dispută când unul dintre ei avansează o aserțiune, să spunem, „*cele trei unghiuri ale unui triunghi sunt egale*", pe care celălalt o respinge construind, de exemplu, un triunghi dreptunghic. Fenomenul este semnificativ pentru anticiparea *contra-exemplelor* care evită generalizările nefundate. Observația lui Hume, din citatul pe care îl vom da mai jos, este explicitată de Beth [2, p.10] în termenii următori: „Să notăm că structura unei asemenea anticipări este transferată de la nivelul discuției la acela al raționamentului formal. Dacă noi introducem un argument deductiv cu cuvintele: «Fie ABC orice triunghi» sau «Fie ABC un triunghi arbitrar», aceasta se întâmplă deoarece alegerea acestui triunghi este lăsată unui oponent imaginar". Beth consideră că observația lui Hume analizată aici, şi conținută în citatul care urmează, constituie o replică la prima chestiune. Şi acum iată ce spune textul lui Hume [1, Vol. I, Book I] în contextul relevant pentru metodologia matematicii pe care l-am schițat anterior: „Aceasta este una dintre cele mai extraordinare împrejurări în afacerea prezentă, ca după ce mintea (gândirea) a produs o idee individuală pe care noi raționăm, obiectul care serveşte, reînviat prin termen general sau abstract sugerează uşor orice alt individual, prin întâmplare (chance) formăm orice raționament care nu este de acord cu... Astfel noi ar trebui să menționăm cuvântul triunghi şi să formăm ideea unui triunghi particular echilateral care îi corespunde şi după aceea ar trebui să asertăm că *cele trei unghiuri ale unui triunghi sunt egale fiecare unul cu altul*, ceilalți individuali ai triunghiurilor scalene şi isoscele, pe care i-am neglijat, transmit imediat asupra noastră percepția falsității acestei propoziții".

3.4. PROGRAMUL „MATHESIS UNIVERSALIS"

Aşadar, intenţia lui Descartes nu a fost un studiu în sine al matermaticii, ci cercetarea secretelor, tainelor universului căreia l-a subordonat. El dorea ca self-evidenţa şi certitudinea – calităţi ale cunoaşterii matematice, în particular ale celei geometrice, excelent statuate în programul euclidian, să le vadă prezente în toate domeniile cunoaşterii relevante despre aceste pomenite mistere ale lumii. Devine inteligibilă intenţia cartezianã, centrală în programul filosofului şi matematicianului francez, găsirea şi cultivarea unei metode utile şi eficace nu atât în demonstraţii, fie şi matematice, cât în rezolvarea problemelor, fie ele mai relevante despre tainele universului. Iată de ce l-a preocupat circuitul pappusian şi de ce punctul de plecare al constituirii metodei lui Descartes l-au constituit analiza pappusiană (geometrii greci au folosit o anumită analiză, pe care au extins-o ulterior la rezolvarea tuturor problemelor, cf. Descartes [2]) şi algebra pe care el n-a conceput-o ca ramură a matematicii, ci numai ca o metodă strâns înrudită cu metoda analizei, aşa cum este consemnat expres în regula XVII, când algebra este considerată prin excelenţă analitică în sens pappusian. Logica (metoda deducţiei silogistice) a fost găsită de Descartes nefolositoare scopurilor sale, căci este operantă numai pentru explicarea a ceea ce cineva deja ştie.

Nesatisfăcut de sursele metodei sale (analiza geoemtrică şi algebră), Descartes le va îmbina (geometria analitică), evitând defectele lor şi prin aceasta erorile lor. Lectura atentă a „*Discursului*" şi a „*Regulilor*" (Descartes [2], [1]) ne dezvăluie o identitate a preocupărilor sale metodologice, încât, dacă mai adăugăm interesul său faţă de opera lui Arhimede şi Appollonius (ambii folosind metoda şi terminologia pappusiană), înţelegem mai deplin rostul «*circuitului pappusian*» în ansamblul demersului metodologic cartezian, relevanţa euristică a acestui circuit, atât de comentat în discuţiile şi conversaţiile euristice din cuprinsul secolului al XVII-lea.

Lakatos [2] opinează că dacă se ignoră circuitul pappusian, o premisă de la care a plecat filosoful francez, riscăm să nu înțelegem istoria intelectuală a cartezianismului. «*Circuitul cartezian*» este, în acest caz, o dezvoltare a celui pappusian sau o reconstrucție rațională a istoriei (intelectuale)? Lakatos [2, p. 87] afirmă că, în fapt, este o reconstrucție rațională a problemei în chestiune şi că istoria nu poate fi rațional înțeleasă decât în lumina unor astfel de reconstrucții, autentice explicații relevante.

Circuitul cartezian în matematică. Acei gânditori care, asemenea lui Descartes, au identificat matematica cu geometria euclidiană şi algebra elementară, au considerat că faptele în matematică sunt „fapte raționate" şi că „ipoteze *oculte*" nu există. În secolele 17 şi 18 matematica a fost „invadată" de fapte, iar cum să fie acestea „*raționalizate*", adică cum să fie ridicate la nivelul faptelor „raționate" a devenit o problemă centrală. Cauchy şi urmaşii săi au rezolvat problema prin procedura „translării", ceea ce în circuitul cartezian corespunde trecerii inductive de la fapte la fapte raționate. Dar, în acelaşi timp, au apărut şi ipoteze oculte, astfel explicarea unor fapte despre linia realelor folosind teoria funcțiilor complexe este analoagă invocării ipotezelor transcendentale în fizică, cf. Lakatos [2]. Deducerea acestor ipoteze din primele principii a fost una din problemele pe care procedura *aritmetizării* şi *logicizării* matematicii a încercat să le soluționeze. Analiza aprofundată a circuitului cartezian matematic ar putea aduce la suprafață aspecte până acum greşit înțelese.

Evoluția ştiinței în secolele 17, 18, 19 a marcat declinul circuitului cartezian. Trei direcții de atac au urmat criticile la adresa circuitului cartezian: i) *inducția (componentă a circuitului) nu transferă adevărul.* Sub atac s-a aflat una din trecerile (paşii) inductive şi anume, cea de la fapte raționate la ipoteze oculte (a se vedea diagrama circuitului cartezian care figurează pe una din paginile anterioare). Dacă pasul respectiv este considerat izolat, atunci criticii au negat că valoarea de adevăr injectată faptelor raționate se poate transmite ipotezelor oculte. Acceptarea criticii implică: a) abandonăm infailabilismul şi admitem caracterul conjectural al ipotezelor ştiințifice; b) sau înlocuim acest pas inductiv, ținta atacului,

prin aşa-numita metodă infailibilă a divizării ca o metodă a demonstrării ipotezelor oculte, fără să mai cădem pe inducție, care constă în enumerarea ipotezelor oculte (conjecturi posibile) din care să fie derivate (explicate) faptele. Falsificăm pe rând ipotezele, deducând din ele propoziții factuale false, până rămâne una, care va fi declarată conjectura nefalsificată. În esență, această metodă, observa Lakatos [2], se bazează pe „*infailibilitatea absolută a intuiției* care inventariază această enumerare completă şi pe *constructibilitatea efectivă a experimentelor cruciale*"; c) mai există o cale neutră, cea a introducerii unei teorii a probabilității ipotezelor ştiințifice, dar care în final conduce la teorii logic insutenabile ale confirmării, ce încearcă să reintroducă, afirmă autorul anterior citat, infailibilitatea pe uşa din dos. Să mai adăugăm că infailibilitatea metodei divizării a fost criticată de logicienii catolici de la Papa Urban VIII la Duhem, iar teoriile probabiliste au fost criticate de K. R. Popper. Şi chiar dacă amintim faptul că aceste critici ignoră complet un detaliu, poate semnificativ, şi anume, că pasul în discuție nu este în totalitatea lui inductiv, conținând o parte considerabilă de natură deductivă numită «*pas deductiv newtonian*», trebuie, oricum, să se accepte eşecul euristicii infailibiliste centrate pe deducerea teoriilor din fapte. Inducția larg răspândită în matematică şi ştiința secolelor 17, 18 a fost sever criticată de matematicieni ca Abel, Cauchy, iar ulterior de „rigorişti". ii) *Deducțiile perfecționate transferă adecvat şi relevant adevărul.* Trecerile deductive (paşii deductivi), deşi criticate uneori, nu au fost niciodată abandonate, încercându-se desăvârşirea lor prin proceduri de translație, cum ar fi «*aritmetizarea*», «*set-teoretizarea*» etc., care au contribuit semnificativ la creşterea rigorii în cunoaştere, fenomen marcat, relevant, prin reducerea numărului de constante quasi-logice şi, în final, de demonstrații executate cu maşini Turing. Lakatos [2] observă că nu a fost apreciat suficient impactul (negativ) datorat unor „translații" failibile. iii) *Nu exista principii pure, şi nu există fapte raționate*. Declinul logicii inductive dacă nu a distrus, cel puțin, a trunchiat circuitul cartezian şi The Zipfastener-ul braithwaitian i-a luat locul, valoarea lor de adevăr circulând într-o singură direcție. „*Fermoarul*" *braithwaitian* poate

transmite valoarea de adevăr, cu condiția ca să fie admise *primele principii*, dar dacă nu sunt admise, noi nu putem decât infirma şi nu demonstra. Circuitul cartezian trunchiat în forma „*fermoarului braithwaitian*" a suferit un al doilea atac acum, nu privind siguranța «*canalelor*» de transmitere a valorii de adevăr, ci referitor la punctele nodale ale „injecțiilor" adevărului în circuit: *principiile prime* şi *fapte raționate*. Cunoaştem din istoria ştiinței câți gânditori reputați a mobilizat căutarea, (aflarea optimistă) a primelor principii (în mecanica Bernoulli, Euler, în etică Spinoza şi Kant, în filosofia politică Hobbes etc.). Astăzi se consideră riscant să admiți ca relevant acest circuit trunchiat cu injectarea valorii de adevăr la nivelul principiilor intuitiv indubitabile; numai unii neokantieni mai împărtăşesc acest punct de vedere. Prin Duhem şi Popper, atitudinea critică a fost extinsă şi asupra faptelor şi să observăm că această tendință-doctrină este consonantă cu liniile directoare ale criticismului elen antic, ce viza relevanța epistemologică a experienței senzoriale. Vom reține din această perspectivă distincția dintre the Zipfastener-ul popperian şi cel al pozitivismului logic, acesta din urmă privilegiind statutul lui Protokolsätze, relevante pentru experiența senzorială; este controversa dintre deductivism şi inductivism. O discuție asupra contribuțiilor ştiințifice ale lui Kepler şi Newton, după care legile lui Kepler ne apar drept conjecturi primitive, iar corecția newtoniană ca o teoremă, ar argumenta în favoarea unui model euristic în care nu există fapte perfect raționate.

3.5. FUNDALUL FILOSOFIC GENERAL LEIBNIZIAN: METAFIZICA ŞI LOGICA

Filosoful de la Hanovra – Leibniz – a rămas celebru în istoria culturii pentru descoperirea calculului infinitezimal şi doctrina sa metafizică, conform căreia «*lumea aceasta este mai bună dintre toate lumile posibile*». El şi-a prețuit teoria sa metafizică despre monade şi logică; pe prima, pentru că lega multe lucruri, care altfel ar fi rămas

nelegate, precum teologia şi mecanicismul, substanţa şi energia, spiritul şi materia, calculul infinitezimal şi microbiologia.

Gottfried Wilhelm Leibniz s-a născut în 1646 şi a murit în 1716, apreciat ca unul din marii logicieni ai lumii, recunoscut dar şi contestat de discipolii lui Newton, ca autor al descoperirii calculului infinitezimal şi al monadologiei (Theodicea şi Monadologia). Geniu universal, autorul a mai multe proiecte şi iniţiative, a dus puţine la finalizare. A funcţionat ca istoric al bibliotecii din Hanovra, consilier ştiinţific şi expert în dreptul internaţional al electorului. Sistemul său n-a fost niciodată expus complet, în acest sens s-a spus că seamănă mai mult cu Platon decât cu Aristotel.

Leibniz a admirat enorm opera lui Aristotel, pe care o considera una din cele mai frumoase descoperiri ale spiritului uman, adevărată artă a infailibilităţii, conceptibilă ca un fel de matematică universală. Dar, el n-a fost un *aristotelician purist*, căci nu credea că toate raţionamentele pot fi „*turnate*" în formă silogistică, cel puţin raţionamentele condiţionale şi disjunctive fiind ireductibile la acest tipar. A conştientizat necesitatea unei teorii extinse a deducţiei care să fie întemeiată pe principiul comun – inerent tuturor formelor de deducţie: substituţia echivalentelor.

Studiul logicii aristotelice l-a condus la ideea fructuoasă de *demonstraţie formală*, fără formalism nefiind posibilă obţinerea rigorii dezirabile în raţionamentele, inferenţele noastre ştiinţifice, necesară expunerii dezvoltărilor, progreselor prin matematică, atenţia noastră fiind concentrată exclusiv asupra formei lor.

Preocupările pentru logică ale lui Leibniz au fost timpurii şi par a fi subordonate ambiţioaselor sale proiecte ca cele privind o *lingua philosophica,* celebrul său program al unei *scientia universalis*. El era convins că *lingua philosophica* sau *characteristica universalis*, preliminarii la instaurarea păcii, ordinii şi progresului ştiinţific, de care depinde cooperarea intelectuală dintre oamenii la care o *characteristica universalis* contribuie în cel mai înalt grad. Spuneam că asemenea preocupări ale filosofului au fost timpurii, căci chiar încă între 13 ani şi 19 ani el a conceput ideea unui *alfabet* al gândirii umane. Pe baza acestui

alfabet, Leibniz [1, p. 185] considera că orice lucru care poate să fie gândit, trebuie să fie construit din combinații convenabile şi orice raționament să poată fi redus la operația cvasimecanică a parcurgerii unei liste. *Ars Magna* a lui Raymond Lullus şi *Computatio sive Logica* a lui Hobbes au stat la baza unor asemenea idei (cf. W. şi M. Kneale [1, p. 346]). Prima încercare a lui Leibniz a vizat înfățişarea formării noțiunilor geometrice complexe cu ajutorul unui cod în care numerele întregi țin locul de *termeni primi*, de exemplu: „1" în loc de *punctum* şi „2" în loc de *spatium*, iar fracțiile țin locul altor termeni care au fost introduşi prin definiție şi aranjați în diferite clase, de exemplu: „1/2" în loc de primul termen din cea de-a doua clasă, care s-a nimerit să fie *quantitas*. W. şi M. Kneale [1] observă insuficiența analizei, deoarece lista celor 27 de *termeni* pentru geometrie nu are la bază vreun principiu inteligibil, căci în timp ce unele elemente ca *punctum, dimensio* sunt specifice geometriei, altele ca *unum, possibile, omne* nu au această calitate. Un astfel de program nu distinge semnele generale ale sintaxei logice de semnele specifice geometriei şi ar fi trebuit să stabilească genurile de complexitatea care intervin în definiții şi ce trebuie să se înțeleagă prin „combinația" unor noțiuni geometrice simple. Ideea leibniziană, că şi complexitatea se dezvoltă din conjuncția atributelor (el are în vedere, când vorbeşte de combinații, complexe pe care le exprimăm prin juxtapunerea adjectivelor sau a substantivelor comune ca în definiția „un triunghi este o figură cu trei laturi drepte") este răspunzătoare de eşecul programului său; lumea nu poate fi înțeleasă în acest mod.

Teoria leibniziană a fost bazată pe principiul: expresiile noastre să *oglindească* structura lumii. Semnele de bază corespunzătoare elementelor simple pot fi alese arbitrar, dar trebuie să existe o analogie între relațiile lor şi relațiile elementelor pe care le semnifică. Importanța semnelor a fost învederată de matematică în contrast cu sistemele noastre obişnuite de semne care generează dificultăți în activitatea intelectuală. Leibniz [2] era preocupat de extinderea unui simbolism adecvat în regiuni mai vaste ale cercetării. Aşa cum consemnam în altă parte (Țurlea [1, p. 71]), „Majoritatea ştiințelor particulare apărute la începutul perioadei

moderne i-au părut lui Leibniz nu numai deconcertante, dar şi ca un obstacol în calea progresului ştiinţific. Leibniz a intuit nu numai ideea unei ştiinţe unificate, ci şi a mijloacelor ei de realizare, celebrul program al unei *scientia universalis* constând într-un limbaj universal al ştiinţei (*characteristica universalis*). El releva posibilităţile şi avantajele unei simbolizări adecvate pentru progresul ştiinţelor şi recomanda o metodă eficientă de inferenţă, concepută după modelul calculului din aritmetică şi algebră, şi care va permite să dobândim ceea ce el a numit adevăruri de raţiune".

Vom încheia această parte a expunerii schiţând unele remarci generale asupra concepţiei de ansamblu a lui Leibniz:

i) Cei mai mulţi comentatori şi interpreţi ai operei leibniziene au constatat că autorul ei este un filosof în sensul larg al cuvântului. Körner [1, p. 28] notează: „El este autorul unui sistem metafizic de mare frumuseţe şi profunzime. Leibniz a fost şi matematician, fizician, teoretician şi multe altele. Mai mult, toate activităţile şi realizările sale intelectuale au fost legate între ele în mod sistematic".

ii) Există o conexiune strânsă, chiar un paralelism, între concepţiile sale logice şi cele metafizice. În esenţă, el a adoptat logica lui Aristotel, iar concepţia acestuia despre reducerea oricărei propoziţii la forma subiect-predicat şi-a găsit analog în metafizica leibniziană în concepţia că lumea constă din substanţe cu atribute. „Poziţia logică mai radicală a lui Leibniz", scrie Körner [1, p. 29] „după care predicatul fiecărei propoziţii este «conţinut în» subiect, îşi are analogul în cunoscuta concepţie metafizică a sa, după care lumea constă din subiecte care se conţin pe ele însele – substanţe sau *monade* care nu interacţionează". Unitatea gândirii lui Leibniz este demonstrată şi de disputele comentatorilor lui cu privire la locul şi rolul metafizicii şi al logicii în ansamblul concepţiilor sale.

iii) Idealul unei ştiinţe unificate (*scientia universalis*) a fost configurat, deodată, cu menirea, pentru care era intenţionat, şi mijloacele de realizare: *characteristica universalis*, un simbolism universal adecvat *calculus ratiocinator* (o teorie formală a deducţiei) şi o *ars combinatoria*

(o teorie formală a definiției). Să observăm statutul privilegiat al celor două discipline ale cunoaşterii umane: logica şi matematica, din al căror impact reciproc s-au născut logica modernă matematică (simbolică) şi programul fundaționist al matematicii – logicismul, care îl are pe Leibniz ca cel mai însemnat precursor.

3.6. LEIBNIZ ŞI PROGRAMUL ŞTIINȚEI UNIFICATE (SCIENTIA UNIVERSALIS); „MATHESIS UNIVERSALIS"

Opera leibniziană are un evident „universalism" care nu este izolat istoric, căci i se poate identifica o filiație istorică ce descinde din epoca barocului şi cu ecouri în formalismul modern. Multiplicitatea deconcertantă a ştiințelor era în viziunea lui Leibniz un autentic obstacol în calea progresului intelectual şi ştiințific; un limbaj filosofic (lingua philosophica) ar permite o cooperare intelectuală fructuoasă şi o mai bună înțelegere între oameni. Realizarea programului său presupunea simboluri pentru toate noțiunile luate ca ultime, neanalizabile şi un aparat adecvat exprimării unor noțiuni formale ca predicație, conjuncție, disjuncție, negație, conexiune condițională, universalitate şi existență; şi noțiunile neformale pot fi exprimate simbolic. *Characteristica universalis* este concepută de Leibniz uneori ca un limbaj algebric, alteori ca o versiune perfecționată a sistemului ideografic al limbii chineze. El intenționa să asigure o *gramatică filosofică* acestui limbaj simbolic universal, ca o caracteristică distinctă, ce releva forma logică a propozițiilor din discurs, simplu şi regulat, cum nu se întâmpla în limbajul natural.

Ideografia sau *scrierea conceptuală* leibniziană trebuia să fie în concepția lui Leibniz o metodă care să contribuie la realizarea programului ştiinței unificate şi care consta într-o manieră de „formare şi aranjare a caracterelor şi semnelor încât ele să reprezinte gânduri, adică ele să fie legate între ele aşa cum sunt gândurile corespunzătoare" (Leibniz). Ecourile doctrinei leibniziene se găsesc în secolul nostru în Wittgenstein [1]:

„Semnul reprezintă ceea ce este perceptibil senzorial în simbol. Deci, două simboluri diferite pot fi redate prin acelaşi semn (scris sau rostit etc.) – ele semnifică atunci în moduri diferite. Nu putem indica niciodată proprietatea comună a două obiecte pe care le notăm cu acelaşi semn, dar le atribuie două moduri diferite de semnificare. Căci, semnul este într-adevăr arbitrar. Se pot alege deci şi două semne diferite, şi unde ar rămâne ceea ce este comun în semnificare? În limbajul comun apare foarte frecvent faptul că acelaşi cuvânt semnifică în moduri diferite – deci aparţine unor moduri diferite – sau faptul că două cuvinte care simbolizează în mod diferit, sunt utilizate în propoziţii aparent în acelaşi mod. Astfel, cuvântul «*este*» apare drept copulă, ca semn de egalitate şi ca expresie a existenţei; «*a exista*» ca verb intranzitiv şi ca «*a merge*»; «*identic*» ca adjectiv; noi vorbim despre ceva, dar şi despre faptul că se întâmplă *ceva*. În propoziţia «Verde este verde» în care primul cuvânt este un nume propriu, iar al doilea un adjectiv – aceste cuvinte nu au pur şi simplu semnificaţii diferite, ci sunt simboluri diferite. În felul acesta iau naştere cu uşurinţă cele mai fundamentale confuzii de care este plină toată filosofia. Pentru a scăpa de aceste erori trebuie să folosim un limbaj de semne care le exclude, în care nu utilizăm acelaşi semn pentru simboluri diferite, nici semne care simbolizează în mod diferit, ca semnificând aparent în acelaşi mod. Deci, un limbaj de semne supus gramaticii logice – sintaxei logice. Scrierea conceptuală a lui Frege şi Russell este un astfel de limbaj care, fără îndoială, nu exclude încă toate erorile".

„*Alfabetul gândurilor umane*" înzestrat cu o *gramatică logică* ar putea oferi, graţie semnelor şi regulilor, o *caracterizare univocă* a conceptelor şi a relaţiilor dintre ele. Gândurile umane se exprimă prin judecăţi, care au forma subiect-predicat, (influenţa aristotelică), sunt reductibile la concepte, acestea fiind construite, la rândul lor, din concepte mai simple, cărora Leibniz le asociază semne întru caracterizarea lor. Desigur, şi alţi filosofi, precum Platon, au folosit diagrame şi procedee notaţionale, dar cu caracter de auxiliare accidentale. Leibniz va conştientiza că fără un simbolism adecvat devine imposibilă stăpânirea unor deducţii, lanţuri inferenţiale mai complicate. „El trebuie să fi

descoperit – în particular, în cercetările sale despre posibilitățile unei matematici a «infinitezimalelor» – că inventarea unui simbolism pentru reprezentarea enunțurilor şi demonstrațiilor, pe de o parte, şi cunoaşterea structurii lor logice, pe de altă parte, deşi separabile în gândire, sunt în realitate foarte rar separabile" (Körner [1, p. 33]). Reprezentarea deducției în simboluri adecvate – fir al Ariadnei în conducerea spiritului – facilita derularea raționamentului formal, oferea cadrul unui *calculus ratiocinator*, un gen de metodă quasi-mecanică de derivare a concluziilor, calculare inferențială pur formală aidoma calculului algebric. Celebrul *Calculemus* leibnizian (Leibniz [1]) putea în acest mediu intelectual să decidă asupra controverselor privind diverse subiecte.

E. W. Beth [3] interpretează *characteristica universalis* – primul aspect al programului ştiinței unificate – în sensurile următoare: i) un limbaj natural, ca de exemplu cel latin; ii) limbaj natural parțial formalizat, formalizarea fixând doar semnificația unor termeni care de obicei variază în anumite contexte în cadrul limbii naturale; ex. limbajul fizicii elementare; iii) limbaj parțial formalizat ca în cazul ii), suplimentat cu unele simboluri introduse expres: limbajul matematic; şi, în fine, limbajul complet formalizat care conține şi unele cuvinte din limbajul natural. Concluzia unei asemenea interpretări este: characteristica universalis nu este neapărat un limbaj simbolic. W. şi M. Kneale [1] sistematizează o listă de două cauze ale nereuşitei programului, vizând direct characteristica universalis; i) era imposibilă alcătuirea unui dicționar pentru noul limbaj preconizat de Leibniz, atâta timp cât cercetările ştiinței moderne se aflau în plin proces de desfăşurare; ii) construcția limbajului ideal necesitat de programul lui Leibniz a fost obstrucționată de un al doilea factor: dogma subiect-predicat a logicii tradiționale (aristotelice), pe care şi-a însuşit-o şi de care nu s-a „eliberat" gânditorul de la Hanovra.

Ştim că proiectul unei „*Enciclopedii*" – ansamblu sistematic al cunoştințelor vremii – l-a preocupat pe Leibniz încă din tinerețe. Exegeții operei sale au observat că, în această perioadă, matematica juca un rol minor în construcția fundamentului ştiinței unificate *via characteristica*

universalis. Logica este dominanta gândirii sale în prima fază a evoluției sale intelectuale, urmând ca ulterior idealul matematic să devină dominant, acestei ştiințe (matematica) acordându-i un spațiu larg în schema sa metodologică, căci dorea ca totul să fie expus în forma demonstrativă a „*Elementelor*" lui Euclid.

Dar, limbajul conceptual leibnizian nu avea un sens în sine, ci trebuia să faciliteze inferențele, raționamentele chiar sub forma unui calcul algebric. În fapt, *calculus ratiocinator* reprezintă un «*sistem de forme de demonstrație*», incluzând operații care aplicate premiselor produceau concluzii fără nici o referire la conținutul concret al constituenților (enunțurilor). Beth [3] interpretează în sens modern acest calcul, cum am mai afirmat, ca o *teorie formală a deducției*.

Ars combinatoria era un sistem complet de «*forme-definiție*» ce dau operațiile care, aplicate unor concepte, permit construirea unor concepte noi, de asemenea independent de conținutul conceptelor implicate. În sens modern, ea ar corespunde, spune Beth [3], unei *teorii formale a definiției*.

Aşadar, *characteristica universalis* era un sistem fundamental de semne, *calculus ratiocinator* era un sistem de reguli de deducție, iar *ars combinatori*, o teorie a definiției, care controlează şi legitimează introducerea semnelor noi ce stau în fapt pentru conceptele noi.

Similitudinile găsite de Leibniz între termenii, propozițiile şi silogismele logicii tradiționale cu literele, ecuațiile şi transformările din algebră, în fapt o asemănare formală frapantă, l-au inspirat şi provocat să prezinte *logica* ca un *calcul*, numindu-şi noua sa ştiință „*matematică universală*". Intenționa Leibniz prin noua sa „*ştiință-metodă*" să absoarbă logica în matematica obişnuită? o matematică prin excelență a cantitativului, deşi Descartes dezvoltase algebra luii Viete, făcând-o capabilă să abordeze şi noțiuni din geometrie? Aşa cum remarcă W. şi M. Kneale [1], acest tip de matematică nu era însă cel mai profund mod de existență al acestei ştiințe, căci puteau fi certe calculele care transcend cantitativul, care abordează relații abstracte sau formale de natură necantitativă, cum ar fi similaritatea şi disimilaritatea, congruența,

incluziunea. Aceşti autori opinează că Leibniz [2, p. 525] avea în vedere o *teorie generală a structurilor* ce ar fi putut oferi o sintaxă pentru *characteristica universalis. Doctrina Formarum Continent Logicam et Combinatoriam* a lui Leibniz înfăţişează această teorie ce trebuia să cuprindă teoria şirurilor, a tabelelor şi a tuturor formelor de ordine, ea urmând să constituie *fundamentul* celorlalte ramuri ale matematicii (ca geometria, algebra, calculul probabilităţilor) şi *instrumentul* descoperirilor ştiinţifice. După declaraţia lui Leibniz, *Ars Combinatoria* făcuse posibile realizările sale din matematică şi inginerie: calculul infinitezimal, dezvoltarea în serie a lui $\pi/4$; maşina de calcul. Dacă, aşa cum am mai spus, o operă îşi dă propria sa măsură şi prin anticipările postume, atunci nu sunt hazardate asociaţii şi conexiuni între tipul de *generalitate* şi *formalitate* urmărit de Leibniz şi *teoria grupurilor* a lui Galois, algebra abstractă modernă. Dintre infinitele moduri de calculare (calcul), el a dezvoltat un calcul al identităţii şi incluziunii şi un calcul geometric al asemănării şi congruenţei, prin ultimul urmărind o tratare a structurilor geometrice fără întrebuinţarea coordonatelor, anticipând două mari realizări: Grassmann: „*Ausdehnungslehre*" – 1844 şi Boole: „*Mathematicul Analysis of Logic*" – 1847. Se poate spune că Leibniz (prin ambele calcule) avea în vedere o teorie generală a formelor, de aici nota de formalitate pregnantă în structura operei sale, la care am făcut mai înainte aluzie. El este negreşit un precursor al logicii matematice, comparativ cu Hume şi Kant, care au avut în mediile culturale mai curând o influenţă ostilă logicii matematice, căreia i s-au adăugat alte condiţii nefavorabile acestei ştiinţe. W. şi M. Kneale [1, p. 401–302] comentează pe marginea acestui eveniment important în istoria intelectuală occidentală: „Deşi Leibniz a formulat un şir de sugestii strălucite, nu era posibil să se realizeze un progres sigur atâta timp cât matematica nu se dezvoltase suficient pentru ca genul de abstracţie dorit de Leibniz să pară firesc mai uşor. Când logica a reînviat la mijlocul secolului al nouăsprezecelea (prin lucrarea lui Boole [1], nota autorului), noua vigoare ce i s-a insuflat a provenit mai curând de la matematicieni, care erau familiarizaţi cu progresele propriei lor specialităţi, decât de la filosofi preocupaţi de controversele dintre idealism şi empirism".

Dezvoltarea abstracției matematice marcată puternic prin trecerea de la *cantitativ* la *calitativ* (formal, structural), fenomen datorat evoluției matematicii de la sfârşitul secolului al 19-lea şi îndeosebi în secolul nostru, avea să dovedească fecunditatea multor idei şi teorii leibniziene. Relevanța ideilor lui Leibniz în constituirea logicismului modern este certă, iar ideea unei ştiințe unificate (în spirit reducționist) a devenit centrală în preocupările membrilor Cercului de la Viena; multe din observațiile adânci şi derutante ale lui Wittgensten [1] sunt prelungiri ale liniilor de forță ale gândirii leibniziene.

Ca o concluzie, citățm unele observații pe care le-am formulat în lucrarea noastră (Țurlea, [1, p. 73]): „Ideea leibniziană de *mathesis universalis* (unificarea logicii şi matematicii) constă, aşadar, nu numai în sistemul de semne (ideografie), ci şi în *logica inventia* sau *ars inveniendi*, căci, pornind de la relații simple ca identități şi fapte primitive, ne oferă toate adevărurile. Avantajele erau demn de prețuit: un limbaj exact superior celui obişnuit, valabil pentru toate ştiințele, facilitând stabilirea relațiilor generale, între care conceptele ştiințifice şi obținerea de noi adevăruri în ştiințele exacte; în sfârşit, *mathesis universalis* urma să joace rolul de *ars iudicandi* în disputele privind problemele metafizice sau etice, căci oferea, în intenția autorului ei, o procedură de decizie pur formală şi complet exactă; caracterul cvasimecanic al acestei proceduri permitea să detectăm şi să eliminăm erorile, slujind drept un adevărat «fir al Ariadnei» în complicatele procese mentale ale diferitelor ştiințe".

3.7. PRELIMINARII PASCALIENE. LOGICISMUL LEIBNIZIAN; LEIBNIZ – PRECURSOR AL LOGICISMULUI MODERN

Concepția tradițională despre ştiința deductivă a fost elaborată de Aristotel şi întrucâtva explicitată şi expusă coerent în unele articulații metodologice de Pascal. După Beth [2, p. 38], Pascal are trei merite: i) a descoperit *principiul inducției complete*; ii) a formulat un criteriu după

care se disting definițiile nominale de orice tip de definiție, criteriul autorizând substituția definiției în locul *definiendumului*; iii) a dat o expunere clară a aspectelor esențiale ale metodologiei științelor deductive, așa cum aceasta a fost formulată de Aristotel (cf. Pascal [1]).

Pascal face referire expresă la postulatul self-evidenței, căci, cum se știe, Aristotel este primul gânditor care a demonstrat într-o manieră devenită clasică, și nu mai puțin celebră, că nu este posibil să definim orice concept sau să demonstrăm orice adevăr; Stagiritul, cum am văzut într-o secțiune anterioară, a explicat acest lucru invocând doctrina sa a intuiției care ne procură cunoașterea directă a conceptelor primitive și a adevărurilor primitive. Pascal [1] scrie textual: „Eu revin la explicația ordinii adevărate care constă, cum eu am spus, în a defini orice lucru și a demonstra orice lucru. Aceasta va fi o metodă perfectă, însă este absolut imposibilă; pentru că este evident că termenii primi pe care cineva va vrea să-i definească vor asuma în explicație termeni care îi preced, și similar, propozițiile prime pe care cineva vrea să le demonstreze vor presupune pe celelalte care le preced; și astfel este clar că cineva nu va ajunge niciodată la primele propoziții". Și Pascal se referă, în continuare, explicit la postulatele aristotelice ale științei deductive: „...nu urmează că cineva ar trebui să abandoneze orice fel de ordine. Pentru că exista un fel de ordine, acela al geometriei". „Aristotel da același exemplu de știință demonstrativă, care este inferior, în adevăr, în măsura în care este mai puțin convingător, însă nu deoarece este mai puțin cert; nu definește orice, nu demonstrează orice; aceasta este unde este inferior; dar asumă numai lucruri care sunt clare și constante în lumina naturală (*postulatul self-evidenței*) și ce este plin de adevăr (*postulatul realității*), natura sprijinindu-l în lipsa demonstrației. Această ordine este cea mai perfectă, constă nu în definirea a orice, nici în demonstrarea a orice, nici însă în a nu defini nimic și a nu demonstra nimic, ci în limitarea la cursul mediu a nu defini lucruri care sunt clare și înțelese de toți oamenii și a defini pe celelalte, și a nu demonstra lucruri cunoscute oamenilor și a demonstra pe celelalte (*postulatul deducției*)".

Rezultă din acest citat că Pascal, ca și Aristotel, a sesizat ideea *structurii duale* a științei deductive; i) pe de o parte, noțiuni primitive și

adevăruri primitive (principiile); ii) pe de altă parte, concepte definibile şi adevăruri demonstrabile, pornind de la primele formulate cu ajutorul lui (i). Această structură dualã asigura ideea de *ordine*, am spune *deductivă*, care l-a preocupat pe Pascal. Descartes şi Kant concepeau structura unitară a ştiinţei ca bazată pe sursa infailibilă a cunoaşterii: *intuiţia* (la Descartes una *intelectuală*, la Kant una *empirică* şi alta *a priori*), cea care procura direct, fără ajutorul unui proces discursiv de raţionare, concepte definibile şi adevărurile demonstrabile. Poziţia lui Descartes şi Kant rămâne „cantonată" la nivelul *principiilor*, punctul (i) din descrierea concepţiei aristotelice şi pascaliene despre structura dualã a ştiinţei deductive, amintind însă de termenul aristotelic intuiţie (Nŏus) care, cum am văzut, la Stagirit „facilita" inducţia care discerne principiile în masa datelor percepţiei (senzoriale, sensibile).

Leibniz [3] se inspiră din două categorii de idei-doctrine: prima aparţine (şi este legată de numele) lui Thales, Apollonius, Proclus şi Arnauld, care au făcut tentative de demonstrarea unor adevăruri geometrice pe care Euclid le-a acceptat ca axiome; a doua categorie urmează linia de gândire a lui Aristotel şi Pascal, conform căreia nu se poate elimina absolut orice asumpţie axiomatică. Leibniz conchide că este necesară o reducţie absolută a bazei axiomatice a ştiinţelor organizate astfel, în sensul că trebuie acceptate numai axiome identice sau primitive. „Mai mult, eu am spus public şi în particular că va fi important să demonstrăm toate axiomele secundare pe care noi le întrebuinţăm în mod obişnuit, prin reducerea lor la axiome primitive sau imediate şi indemonstrabile, pe care eu recent le-am numit identităţi".

Noi, modernii, numim astăzi aceste *identităţi leibniziene* ca fiind *tautologii* sau *identităţi logice*, logicianul din Hanovra definindu-le în termenii următori: „Adevărurile primitive de raţiune sunt acelea pe care eu le denumesc cu numele general de identităţi, din cauză că ele repetă acelaşi lucru fără să ne înveţe nimic". Importanţa adevărurilor de această natură (tautologiile) este schiţată de Leibniz astel: „nu toate adevărurile identice sunt nefolositoare... Consecinţele logicii (de exemplu) sunt demonstrate prin (cu) principii identice; şi geometrii au nevoie de

principiul contradicției în demonstrațiile lor care reduc *ad absurdum*... Ceea ce face clar că cele mai pure propoziții identice care par cele mai nefolositoare sunt de un uz considerabil în astract şi în general; şi aceasta ne învață că cineva nu ar trebui să disprețuiască orice adevăr".

Ca şi Hobbes, Leibniz [2, p. 518, p. 188] considera că toate adevărurile necesare sunt garantate de definițiile termenilor care intervin în formularea lor şi că nu există, cu excepția principiului identității, axiome absolut indemonstrabile. Găsim aici, *in nuce, logicismul* lui Leibniz. Logicianul şi matematicianul german era convins că natura şi structura demonstrației rezidă în faptul că trebuie arătat că şi conceptul predicatului propoziției de demonstrat este conținut în conceptul subiectului, iar pentru realizarea acestui lucru trebuie analizate cele două concepte şi evidențiate relațiile dintre ele. „Procedeul esențial în construirea unei demonstrații" – arată W. şi M. Kneale [1, p. 354], constă în a enunța un lanț de definiții în raport cu care putem observa că propoziția ce trebuie demonstrată este o identitate virtuală". Leibniz [3] ilustrează intenția centrală a programului său logicist pe cazul demonstrării unui adevăr matematic, în construcția acestei demonstrații admițând numai axiome-identități (logice), care nu angajează nici un concept cu specific matematic. Şi acum prezentăm demonstrația respectivă:

Enunțul: Nu este pe deplin un adevăr evident că $2 + 2 = 4$, asumând că $4 = 3 + 1$;

Definiții: 1) $2 = 1 + 1$

2) $3 = 2 + 1$

3) $4 = 3 + 1$

Axiome: axioma identității, punând egal în locul egalilor, egalitatea rămâne valabilă, se conservă;

Demonstrație (cf. Leibniz [3]): Conform principiului identității $2 + 2 = 2 + 2$; conform definiției 1) avem $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$; mai avem $2 + 2 = (2 + 1) + 1$; conform definiției 2): $2 + 2 = 3 + 1$; şi conform definiției 3): $2 + 2 = 4$.

Demonstrația lui Leibniz are, așa cum au arătat Frege [1, p. 7] (și Bolzano), o carență, deoarece pasul de la rândul al doilea: $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ (cf. def. 1) la rândul al treilea: $2 + 2 = (2 + 1) + 1$ cere legile asociativității: $x + (y + z) = (x + y) + z$, care necesită demonstrație.

W. și M. Kneale [1, p. 354] comentează natura și structura acestui tip de demonstrație în termenii următori: „Dacă toate raționamentele, silogistice și nesilogistice, sunt doar înlocuirea unor expresii prin alte expresii cu care sunt echivalente prin definiție, atunci este indiferent dacă începem cu o identitate și trecem în mod sintetic de la aceasta, prin pași succesivi, la teza de demonstrat, ca în exemplul dat mai sus, sau începem cu teza de demonstrat și o reducem în mod analitic, prin pași succesivi la o identitate. Deosebirea de ordine nu se va ridica la o deosebire de metodă, căci în fiecare caz putem aplica un lanț de definiții, descoperirea constând în ordonarea acestora sau, la un nivel mai profund, în cercetarea combinațiilor posibile ale predicatelor". Autorii citați consideră nesatisfăcătoare demonstrația, mai exact concepția care stă la baza ei, deoarece se întemeiază pe supoziția că în orice adevăr afirmativ *predicatum inest subiecto* Leibniz vede complexitatea ca generată de conjuncția atributelor, definiția unui termen având ceva asemănător descompunerii unui număr de factori primi, și conexiunea necesară fiind analoagă divizibilității unui număr ce corespunde subiectului printr-un număr corespunzător predicatului (cf. Leibniz [1]. Ori, complexitatea apare și în alte moduri, și în consecință demonstrația nu urmează inexorabil un drum așa símplu și linear. Kneale [1, p. 355] continuă: „Fiecare termen are o unică definiție adecvată, care este descompunerea sa în noțiuni prime, dar pentru scopurile demonstrației nu este întotdeauna necesar să mergem atât de departe și dacă ne oprim la o anumită etapă, putem avea mai multe definiții echivalente ale unui termen, una adecvată într-un anumit context, alta în altul, în funcție de acea proprietate a definiendumului care trebuie demonstrată".

Chiar dacă programul logicist al lui Leibniz a fost prematur în raport cu dezvoltarea matematicii, încercările lui de a-l realiza prezentând astăzi mai mult un interes istoric, observă Beth [3], (chiar demonstrația

pe care i-am reprodus-o a fost corect criticată şi respinsă chiar de întemeietorul însuşi al logicismului modern – Frege), trebuie să i se recunoască lui Leibniz precizia cu care el a identificat paşii acestui program (cf. Beth [3]: 1) Construcţia unei teorii pe care s-o numim «*logica pură*», cuprinzând toate entităţile, această construcţie conformă principiilor metodologice ale lui Aristotel; 2) definirea conceptelor matematice prin intermediul logicii pure; 3) demonstraţia axiomelor specifice matematicii, plecând de la mulţimea identităţilor logice şi de la definiţiile diverselor concepte matematice; 4) pentru obţinerea unui înalt standard de rigoare este necesar încă un preliminar şi anume, construcţia unui limbaj formalizat capabil să servească ca mod de expresie pentru logica pură.

Este indubitabilă influenţa lui Leibniz asupra logicismului modern, în particular asupra lui Frege. Logicismul filosofic fregean reţine din filosofia leibniziană ideile: *mathesis universalis* anticipa unificarea logicii cu matematica, reducţia absolută a asumpţiilor axiomatice până atingem principii logice, singurele nedemonstrabile; şi instrumentul de realizare al programului leibnizian a fost «*scrierea conceptuală*», împărtăşită pe deplin de gânditorul de la Iena (Frege).

3.8. LEIBNIZ DESPRE NATURA MATEMATICII: „ADEVĂRURI DE RAŢIUNE" ŞI „ADEVĂRURI DE FAPT"

Leibniz a respins convenţionalismul lui Hobbes. Considera că toate adevărurile necesare depind de definiţiile noastre, dar, spre deosebire de Hobbes, nu considera aceste definiţii complet arbitrare. O definiţie reală, contradistinctă de una nominală, conţine o aserţiune implicită a posibilităţii a ceea ce este definit, posibilitate care nu depinde de convenţiile care reglează întrebuinţarea cuvintelor. Leibniz [1] a observat că în absenţa acestei posibilităţi nu pot exista demonstraţii şi, în acord cu concepţia scolasticilor, a susţinut că o axiomă este evidentă pentru

cei care îi înțeleg termenii, iar a înțelege termenii presupune recunoaşterea posibilității a ceea ce este semnificat, (*apud*, W. şi M. Kneale [1, p. 355]). Este evidentă cerința ca expresiile care figurează în ansamblul unei demonstrații să semnifice ceva posibil. *Adevăr necesar* este definit ca fiind un adevăr, a cărui negație este formal contradictoriu cu sine (Leibniz [I, III, p. 40], iar „posibil" ar însemna a fi „scutit" de contradicții formale cu sine.

Leibniz [4] a considerat distincția *adevăruri de rațiune* şi *adevăruri de fapt* un fel de «*chintesență*» a filosofiei sale: „Există, de asemenea, două feluri de *adevăruri*, cele de raționament şi cele de fapt. *Adevărurile de raționament* sunt necesare, iar opusul lor este imposibil; *adevărurile de fapt* sunt contingente şi opusul lor este posibil. Când un adevăr este necesar, rațiunea sa poate fi găsită prin analiză, descompunându-l în idei şi adevăruri mai simple, până când ajungem la cele ce sunt primare...". *Adevărurile rațiunii* sunt bazate pe principiul contradicției în care sunt cuprinse şi principiul identității şi cel al terțiului exclus. Axiomele, postulatele, definițiile şi teoremele matematice au statutul de adevăruri de rațiune, propoziții identice ale căror opuse implică o contradicție expresă.

Leibniz împărtăşeşte concepția lui Aristotel, după care orice propoziție are, în ultima analiză, o structură de forma subiect-predicat, dar va adăuga că subiectul „*conține*" predicatul, această aserțiune trebuind să fie adevărată, credea filosoful german, despre toate *adevărurile de rațiune*. O situație cu totul diferită au *adevărurile de fapt*, căci pentru a explica sensul aserțiunii că subiectul conține predicatul, Leibniz trebuie să apeleze la noțiunile de *Dumnezeu* şi *infinitate*. Numai Dumnezeu poate realiza reducția unei propoziții contingente (adevăr de fapt), care să releve predicatul ca fiind conținut în subiect; şi pentru a fi convingător, Leibniz [5, p. 62] face comparație cu rapoartele raționale, caz în care: „reducția implică un proces infinit şi totuşi aproximează o măsură comună, aşa încât se obține o serie definită, dar care nu se termină, tot astfel şi adevărurile contingente reclamă o analiză infinită pe care numai Dumnezeu o poate realiza".

Dacă *adevărurile raţiunii* sunt valabile pentru toate lumile posibile, celelalte, *adevărurile de fapt*, care sunt, într-un sens, contingente, deoarece depind de voinţa lui Dumnezeu, sunt valabile numai pentru lumea reală. *Principiul raţiunii sufîciente* ar asigura şi acestor propoziţii (adevăruri de fapt) un caracter necesar, adică şi acestea sunt necesare, deoarece nimic nu se întâmplă fără un temei. Acest *principiu (al raţiunii suficiente)* afirmă: „...nimic nu are loc fără raţiune suficientă, adică nimic nu se întâmplă fără a fi posibil, pentru cel care ar cunoaşte în mod suficient, să indice un temei care să fie suficient să determine de ce lucrurile sunt aşa şi nu altfel" (Leibniz [6]). Acest principiu (cel al raţiunii suficiente) are, ca şi principiul contradicţiei, rolul unui principiu de analiză şi inferenţă, numai că în cele mai multe cazuri, Dumnezeu este cel care poate să cunoască lucrurile suficient să se poată aplica principiul în cauză.

Relevanţa distincţiei *adevăruri de raţiune* şi *adevăruri de fapt (propoziţii necesare* şi *propoziţii contingente)* privind filosofia matematicii a lui Leibniz este conexată distincţiei *matematica pură – matematica aplicată*, deoarece matematica aplicată evidenţiază conexiunea dintre propoziţiile matematice şi propoziţiile empirice. Körner [1, p. 3] observă că: „...o părere greşită sau neclară despre propoziţiile empirice, sau chiar inexistenţa vreunei păreri asupra acestor propoziţii, ar putea afecta foarte mult modul în care este concepută matematica aplicată" este o remarcă ce se aplică cu siguranţă modului în care Leibniz şi succesorii săi moderni au gândit natura matematicii.

Filosofia lui Leibniz despre natura şi conţinutul matematicii este radical distinctă şi diferită de cea a anticilor – Platon şi Aristotel. Spre deosebire de aceştia, care concepeau matematica ca purtând asupra unor obiecte idealizate, obţinute prin abstracţie, pentru Leibniz propoziţiile matematice sunt asemenea propoziţiilor logice, deoarece sunt adevărate pentru că negarea lor ar fi logic imposibilă. Körner [1, p. 31] scrie: „Deşi orice aparenţă *prima facie* ar atesta contrariul, o propoziţie matematică este tot atât de mult sau tot atât de puţin «despre» un obiect particular sau «despre » o clasă de obiecte, după cum propoziţia: «dacă ceva este un toc acesta este un toc...» este despre tocul meu particular, sau despre

clasa tocurilor, sau despre clasa obiectelor fizice, sau orice altă clasă de obiecte. Am putea spune că ambele propoziții sunt necesar adevărate despre toate obiectele posibile, despre toate stările de lucruri posibile, sau, folosind faimoasa expresie leibniziană, ele sunt adevărate «*în toate lumile posibile*». Trebuie considerat că oricare dintre aceste formulări implică teza că propozițiile matematice sunt adevărate şi necesare pentru că negarea lor ar fi logic imposibilă".

Considerăm, ca şi Körner, două propoziții; „1 + 1 = 2" şi „un măr cu un măr fac două mere"; prima aparține matematicii pure, a doua aparține matematicii aplicate, cel puțin printr-o decizie a noastră. Ce spune filosofia lui Leibniz despre aceste propoziții? Enunțul de matematică pură „1 + 1 = 2" este considerat adevărat în virtutea legii contradicției şi, în consecință, este adevărat în orice lume posibilă. Afirmația „un măr şi cu un măr fac două mere", ca enunț al fizicii, „este adevărată în această lume pe care Dumnezeu a trebuit s-o creeze, dacă în conformitate cu principiul rațiunii suficiente el a avut temeiuri s-o creeze, adică dacă aceasta a trebuit să fie cea mai bună dintre lumile posibile" (Körner [1, p. 32–33]).

Se observă că maniera în care Leibniz a încercat să elucideze natura matematicii aplicate, şi în particular concepția sa despre statutul propozițiilor empirice comportă o manifestă «*încărcătură teologică*», ceea ce face filosofia leibniziană a matematicii puțin verosimilă cu privire la acest aspect.

CAPITOLUL IV

FILOSOFIA KANTIANĂ A MATEMATICII

4.1. TEORIA KANTIANĂ GENERALĂ A CUNOAŞTERII

Kant se aşează într-o relaţie de contuitatea cu opera marilor săi predecesori Aristorel (şi poate chiar Platon), Euclid, Descartes, Newton, Leibniz. Îl leagă de Platon, un gen de *realism matematic*, de Aristorel încercarea de a restaura teoria unitară aristotelică a ştiinţei. Lui Euclid îi datorează convingerea sa, cu poziţie centrală în marea sinteză filosofică asupra ştiinţei clasice pe care a realizat-o, că spaţiul perceptual este euclidian şi este descris de geometria euclidiană tridimensională; aprioritatea relativă a structurii spaţio-temporale faţă de legile specifice ale fizicii, caracterul absolut al reprezentării euclidiene a spaţiului, raportul specific dintre geometrie şi fizică, formalismul matematic şi conţinutul fizic, situaţia conceptuală a infinitului etc. – presupoziţii conceptuale ale structurii marii sinteze newtoniene (fizica clasică) emerg din euclidianism şi aristotelism. Dar, astfel am spus ce datorează Kant lui Newton. De fapt, Kant şi-a dezvoltat concepţia sa asupra cunoaşterii, inclusiv a celei matematice, în contextul analizei, reconstituirii posibilităţii marii sinteze ştiinţifice newtoniene de a exista ca o construcţie, entitate conceptuală. Afinitatea pentru Descartes este marcată de concepţia lor intuiţionistă, după care o analiză a raţionamentului

matematic în termenii silogismului rămâne irelevantă pentru natura acestui tip de inferență în cunoaştere. Concepțiile lui Leibniz referitoare la metoda logicii şi matematicii l-au influențat în descrierea metodei sintetice; asemenea expresii din vocabularul kantian ca „substituția semnelor conform regulilor"; sau „introducerea semnelor în locul lucrurilor înseşi" sunt evident leibniziene.

Teoria generală a cunoaşterii a lui Kant este structurată, am spune, singular în peisajul filosofiei universale, prin statuarea unor cupluri-distincții conceptuale ca *analitic-sintetic, a priori – a posteriori* cu relevanță în filosoia sa a matematicii; prima distincție se referă la natura cunoştiințelor, cea de-a doua vizează originea cunoştiințelor.

Astfel observă cei mai importanți exegeți ai operei kantiene este meritul filosofului de la Königsberg de a fi adus, în prim plan al filosofiei, distincția analitic şi sintetic. (A se vedea „Prolegomene" § 3, 5). Dar înainte ca să folosească aceste adjective, Kant a folosit termenii „analiză" şi „sinteză" asigurând continuitatea tradiției de la antici la moderni.

Termenul „analitic" are o multitudine de sensuri, dintre care numai unele „acoperă" intenția lui Kant (Cf. Hintikka [3]). Oricum, Hintikka [3] remarca, însă, corect că „analiticitatea a fost strâns asociată de Kant cu adevărurile logice şi cu definițiile", unele aserțiuni din „*Critica rațiunii pure*" consemnînd, expres, că un adevăr este analitic, dacă el poate fi stabilit cu ajutorul principiilor contradicției şi identității, care aparțin logicii, fără a se raporta la un conținut determinat; sau, o aserțiune ca aceasta „ceea ce eu gândesc în conceptul meu de triunghi nu este altceva decât definiția", ar conduce la aprecierea că Imm. Kant identifica *adevărul analitic* cu adevărul întemeiat în virtutea definițiilor. Hintikka [3] observă că „oricât de vagă şi de echivocă ar putea fi noțiunea de *analiticitate* a lui Kant, intenția era departe de a cuprinde toate adevărurile conceptuale"; Kant a susținut că *adevărurile analitice* nu trebuie identificate cu *adevărurile conceptuale*, a căror specie sunt, căci există adevăruri conceptuale şi care sunt, totuşi, sintetice, este cazul adevărurilor matematice, care au statutul de *propoziții sintetice a priori*. Într-o judecată

sintetică adesea ni se cere să unim în gândire un predicat anumit cu un concept dat şi această necesitate este inerentă în conceptele însele; aceasta nu face judecata analitică pentru că întrebarea decisivă „nu este ce ar trebui să unim în gândire cu un concept dat, ci ce anume noi gândim realmente în el, chiar dacă numai în mod obscur".

Să rămânem, în continuare, la configurarea termenilor *analitic şi sintetic* la nivelul *teoriei generale a cunoaşterii* a lui Kant. Kant discută aceste concepte cu privire la *definiţii* şi *demonstraţii*.

Definiţia sintetică pleacă de la noţiuni existente şi din combinarea lor produce o noţiune nouă, cu alte cuvinte operează cu noţiuni gata construite. Definiţia analitică pleacă de la o noţiune ce urmează să fie definită, al cărei statut pare confuz, sau, oricum, indistinct, şi se încearcă o conturare explicită a ei; se notează despre definiţiile sintetice caracterul lor, oarecum, arbitrar, ceea ce nu este cazul celor analitice.

Distincţia se păstrează şi la nivelul demonstraţiilor, sau, poate mai adecvat spus, al metodelor de demonstraţie. Astfel, se disting inferenţe sintetice şi inferenţe analitice. Se întrebuinţează simboluri adecvate pentru noţiuni definite sintetic şi „care, prin compunerea lor, arată ostensiv maniera în care aceste noţiuni au fost definite" (Beth [1, p. 44]). În inferenţa sintetică se poate opera cu aceste simboluri ca reprezentând noţiunile. În cazul demonstraţiei analitice păstrăm în mintea noastră noţiunile, căci nu suntem siguri de adecvarea definiţiilor lor. Specificul celor două metode este formulat de Kant astfel: metoda sintezei consideră universalul (noţiunea) *in concreto*, iar metoda analizei îl considera *in abstracto*. El crede că metoda analizei este aplicabilă în fizica newtoniană, iar cea a sintezei în matematică; de asemenea, metoda analitică este aplicabilă în filosofie.

Kant a introdus cunoscuta diviziune a judecăţilor în „*analitice*" şi „*sintetice*", cum spune el, „indispensabilă pentru critica intelectului omenesc şi menită să devină clasică în această critică". Kant numeşte *analitice* acele judecăţi al căror predicat este cuprins în noţiunea de „subiect" ca de pildă: „Orice corp este întins", deoarece nu poţi gândi un corp care să nu fie întins. Sursa „judecăţilor analitice" este legea

contradicției, căci predicatul nu poate fi negat fără contradicție despre subiect. Judecățile analitice au o valoare universală şi necesară, însă pur logică, dar nu extind cunoaşterea. Beth [1, p. 46]; consideră că observația lui Kant de mai sus cu privire la *principiul contradicției* ca *sursă a judecăților analitice* a generat *interpretarea curentă*, dar *fundamental incorectă a analiticității*, care identifică metoda analitică cu o procedură pur formală, logică şi care a stabilit, în final, identitatea dintre adevărul analitic şi adevărul logic, dintre *adevărul analitic* şi *adevărul conceptual*. Oricum, să reținem aceste obiecții, aduse interpeetării analiticității din filosofia kantiană şi să amânăm, pentru moment, enunțarea unor remarci privind reconstrucția analiticității din perspectiva logicii cuantificării, care, după Hintikka, n-ar fi fost considerată logică de filosoful german. Judecățile analitice explicitează conținutul conceptelor cu rol de „*subiect*" (în exemplul lui Kant explicitarea a ceea ce este implicat în noțiunea de „corp"), motiv pentru care el le-a numit „judecăți explicative". Evaluarea judecăților analitice, cere numai analiza pur logică, fără nici un apel la experiență, considerent pentru care se spune că sunt judecăți a priori. Dimpotrivă, „judecățile sintetice" extind, îmbogățesc cunoaşterea, căci ele prin afirmarea predicatului adaugă ceva la conținutul ce subzistă în conceptul subiectului. Există două feluri de „judecăți sintetice": *a posteriori* şi *a priori*, primele au origine empirică, ultimele izvorăsc din intelectul pur şi rațiunea pură. Chestiunea judecăților a posteriori era rezolvată încă de Hume: au valabilitate probabilă, căci provin din experiență, care nu poate niciodată să le confere universalitate şi necesitate, adică valabilitate, obiectivitate, motiv pentru care nu sunt considerate valabile. N. Bagdasar [1, LXXIII] comentează astfel punctul de răscruce în care s-a aflat Kant: „Dacă nu ar exista decât judecăți sintetice a posteriori şi judecăți analitice, atunci nici o ştiință nu ar fi posibilă, fiindcă judecățile sintetice a posteriori nu conțin universalitate şi necesitate, iar judecățile analitice care sunt ce-i drept apriorice, sunt în realitate tautologice. Atât matematica pură cât şi fizica matematică pură operează însă cu judecăți a căror aprioritate nu este pusă la îndoială, dar pe care cei ce le-au analizat le-au interpretat ca

fiind de natură analitică, ca fiind bazate pe principiul contradicției – ceea ce era cu totul eronat. Căci toate judecățile matematice şi principiile fizicii matematice sunt judecăți sintetice, şi fiindcă implică necesitatea, sunt, pe lângă sintetice şi a priori. Şi Kant pune întrebarea, devenită celebră în cadrul teoriei sale epistemologice: «Cum sunt posibile judecățile sintetice a priori?»".

Înainte de a urmări demersul kantian în analiza naturii şi structurii propozițiilor (judecăților) *sintetice a priori*, şi care reclamă şi alte concepte specifice „*criticii rațiunii pure*", precum „intuiție", „*intuitivitate*", „*construcție*" şi altele; să mai stăruim puțin asupra semnificației aprioriului kantian ceea ce poate să aducă elucidări, sau, cel puțin, clarificări parțiale, privind un alt termen, «*transcendental*», care desemnează un cuprins ireductibil, poate, o nouă metodă, cadru, sau perspectivă de abordare introduse de filosoful german în orizontul filosofiei.

După unii comentatori, de exemplu N. Bagdasar [1, p. LXX], metoda folosită de Kant este numită *transcendentală* sau *critică*. (Se ştie că filosoful german şi-a numit opera fundamentală „Tratat despre metodă"). N. Bagdasar [1, p. LXX] scrie: „Termenul «*transcendental*» are la Kant un sens cu totul propriu. Spre deosebire de termenul «*transcendent*» care are un sens metafizic, şi înseamnă „ceea ce depăşeşte experiența", „ceea ce se află dincolo de orice experiență", termenul «transcendental» are un sens *epistemologic* şi se referă nu direct la *obiectele* cunoaşterii noastre, ci la cunoaşterea obiectelor. Dar nu la orice cunoaştere a obiectelor, ci numai la cunoaşterea lor *a priori*. Termenul *a priori* are însă la Kant un sens cu totul propriu. *A priori* nu are la Kant sensul tradițional de cunoaştere a ceva cu ajutorul cauzelor lui, ci are sensul de: neprovenind din experiență, nebazându-se pe experiență, înaintea experienței, dar care o face posibilă, constituie forma experienței". *A priori* nu înseamnă însă «*înnăscut*». Dacă factorii pe care metoda transcendentală îi determină ca fiind de natură apriorică, ar fi înnăscuți, ei ar trebui să fie mereu, permanent activi, ceea ce nu e cazul".

După cum se observă, circumscrierea semnificației „*a priori*"-ului kantian, central în perspectiva transcendentală introdusă de filosofia

critică, se face prin raportarea la experienţă şi la psihologie, căci privind cel din urmă aspect, metoda transcendentală nu-şi pune problema genezei psihologice a cunoştiinţelor noastre, explicaţia genetic-psihologică rămânând irelevantă pentru valoarea lor epistemologică, o problemă care l-a preocupat pe filosoful german. Contribuţiile lui Locke, Leibniz, Hume în problema genezei psihologice a cunoştiinţelor nu au fost recunoscute de Kant ca soluţii la problema *valorii obiective a cunoştiinţelor* şi, de altfel, a *posibilităţii ştiinţei*.

Aprioricul kantian determinat pe calea transcendentală este constituit din „elemente originale, ireductibile, ultime ale cunoştiinţei care constituie fundamentele şi condiţiile oricărei ştiinţe şi ale căror atribute esenţiale şi indispensabile sunt necesitatea absolută şi universalitatea riguroasă" (Cf.N. Bagdasar [1, p. LXXI]); ori valoarea cunoştiinţei nu poate cădea în competenţa psihologiei descriptive, ci a teoriei cunoaşterii. „Metoda transcendentală procedează critic, fiindcă examinează cunoaşterea prin separarea elementelor ei, şi analiza lor, prin distingerea funcţiilor cognitive în activitatea lor pură, prin examinarea rolului fiecăreia din ele" (N. Bagdasar [1, p. LXXI]). Filosofia critică se opune, pe de o parte, raţionalismului şi empirismului, care vor să cunoască lucrurile, dar fără ca în prealabil să cerceteze mijloacele de cunoaştere, de aici necesitatea resimţită de Kant a unei critici a întrebuinţării facultăţilor cognitive – intelect, raţiune, dar şi sensibilitate – iar pe de altă parte, se opune scepticismului, care se îndoieşte de capacitatea umană de cunoaştere.

4.2. TEORIA KANTIANĂ A CUNOAŞTERII MATEMATICE

Un filosof de talia lui Kant are o operă complexă, şi, poate, controversată nu numai prin originile ei nobile în cultura greacă antică, filosofică şi matematică şi cea modernă, ci şi prin rezonanţa şi impactul ei postum. Acest impact îl găsim la originea unor mari programe

fundaționaliste ale matematicii divergente şi rivale: logicismul fregean, formalismul hilbertian şi intuiționismul brouwerian. Kantianismul a provocat şi reflecții ce au condus la concepții opuse apriorismului, al căror reprezentant important a fost J. S. Mill. Este îndeobşte acceptat că, de la vechii greci încoace, matematica a fost considerată aproape unanim *o ştiință a priori*, deci o disciplină ştiințifică ale cărei propoziții se pot stabili fără a apela la experiență, fără a invoca informații asupra unor obiecte particulare. J. S. Mill a susținut, împotriva acestei tradiții care l-a inclus şi pe Kant, că aritmetica este fundată pe inducții pornind de la fapte referitoare la anumite grupe de lucruri. În concepția lui J. S. Mill demonstrația egalității „5 + 2 = 7" face apel la axioma „ceea ce este compus din părți, este compus din părțile acestor părți", şi la definițiile „7 = 6 + 1" şi „6 = 5 + 1". J. S. Mill [1, XXIV, § 5] afirmă că axioma, fiind evidentă simțurilor în toate cazurile care pot fi supuse deciziei lor şi atât de generală încât este coextensivă cu natura însăşi, trebuie considerată un adevăr inductiv sau o lege a naturii de nivel superior: chiar. mai mult, el argumenta că şi definițiile implică asertarea unor colecții decompozabile într-un anume fel. Consecința unei asemenea concepții inductivist-empiriste este contestarea şi negarea caracterului aprioric al matematicii, în particular al aritmeticii.

Dacă aceasta a fosr reacția față de *a priori* în perioada imediat următoare, mai târziu, acest concept va fi asimilat cu cel de *tautologie* de Wittgenstein [1 (via opera lui Russell)]: „certitudinea apriori se relevă ca ceva pur logic", „logica precede orice experiență a faptului că ceva este aşa", „aşa numita lege a inducției nu poate fi în nici un caz o lege logică, căci ea este în mod evident o propoziție cu sens. Şi de aceea ea nu poate fi nici o lege a priori", „logica este apriori datorită faptului că nu se putea gândi ilogic". „Tautologia decurge din orice propoziție; ea nu spune nimic"; „Tautologia şi contradicția nu sunt imagini ale realității. Ele nu reprezintă nici o situație posibilă. Căci una admite *orice* situație posibilă, cealaltă nici una. În tautologie condițiile concordanței cu realitatea – relațiile de reprezentare – se anulează reciproc, aşa încât ea nu se găseşte în nici o relație de reprezentare cu realitatea". Matematica,

ca şi logica, a fost declarată în virtutea concepţiei russelliene şi wittgensteiniene, o disciplină tautologică, nul informativă despre realitate, ale cărei structuri pot doar satura schemele conceptuale proprii ştiinţelor empirice, factuale. Empirismul logic al membrilor «*Cercului de la Viena*» nu numai că va asimila asemenea concepţii, dar va statua cunoscutele dogme ale empirismului despre apriori-aposteori, analitic şi sintetic (vezi Quine [1]) şi va pune în circulaţie, cu viză critică la Kantianism, teza «*dizolvării sinteticului a priori*» şi care, cum se ştie, cf. lui Hintikka [3] a fost dovedită incorectă, urmare a cercetărilor din domeniul logicii cuantificării. Investigaţiile din logica cuantificării corectează concepţia kantiană despre logică, justifică inferenţele matematicii ca inferenţe sintetice şi-l reabilitează pe filosoful german.

Deja am anticipat câte ceva din destinul mult mai sinuos al celorlalte distincţii conceptuale marcante: analitic şi sintetic. Frege l-a considerat pe Kant exponentul principal al punctului de vedere, după care propoziţiile matematicii sunt sintetice, dar nu a acceptat distincţia kantiană între cele două tipuri de judecăţi. Frege [1] spune că un adevăr este *analitic* dacă pentru demonstrarea lui facem apel numai la legile logicii generale şi la definiţii, iar *sintetic* este un adevăr pentru a cărui demonstraţie folosim premise care nu sunt de natură general logică. Se ştie că Imm. Kant [2] a legat adevărul judecăţilor analitice de principiul noncontradicţiei, şi prin aceasta el era aproape de punctul de vedere al logicianului de la Iena. Obiecţia adusă concepţiei kantiene derivă din faptul că filosoful de la Königsberg a operat cu un concept de logică inadecvat, în sensul de prea restrâns, căci, atunci cînd el se întreba dacă conceptul predicat era sau nu conţinut în conceptul subiect al unei judecăţi, opera cu un criteriu valabil numai pentru judecăţile universal-afirmative din cunoscuta schemă a lui Aristotel. Kneale, W. şi M. [1, p. 75] comentează atitudinea lui Frege faţă de distincţia kantiană amintită, (*analitic-sintetic*), în felul următor: „În judecăţile singulare sau existenţiale conceptul de subiect nu apare. Se pare că el (Kant) concepea definiţia unui concept complex doar ca o listă de note, în timp ce definiţiile cu adevărat importante din matematică, de exemplu aceea a continuităţii

unei funcții, nu sunt de acest tip. Aici Frege pune degetul pe o carență a logicii tradiționale care nu fusese observată nici măcar de acei predecesori ai săi care s-au interesat cel mai îndeaproape de această chestiune. Leibniz, de exemplu, considera conceptele şi definițiile în maniera propusă de analiza adevărurilor analitice la Kant; după cum am văzut, acesta a şi fost motivul principal pentru care el nu a reuşit niciodată să dea un exemplu convingător al marii dezvoltări pe care a proclamat-o în scrierile sale de logică". Este evident că definiția frageeană a analiticului are în vedere proprietatea sa logică, mult mai complexă decât cea tradițională, pe care o avea în vedere Kant.

O evaluare mai corectă a atitudinii lui Frege față de Kant şi formulare a sa a distincției *analitic-sintetic* ne obligă, ca înainte de a ne referi la evoluțiile post-fregeene ale investigațiilor în domeniu, să-l citățm cu un pasaj semnificativ, căci dacă critică distincția kantiană dintre adevărurile analitice şi cele sintetice, relevanța ei pentru aritmetică, atitudinea lui nu se reduce la aceste aspecte: „Pentru a nu-mi atrage reproşul de a fi căutat să şicanez un geniu pe care toți nu-l putem privi decât cu admirație recunoscătoare, cred că este cazul să reliefez şi acordul de idei, care au o pondere cu mult mai mare. Pentru a vorbi numai despre ceea ce este imediat relevant, văd un mare merit al lui Kant în distincția dintre judecățile analitice şi cele sintetice. Arătând că adevărurile geometriei sunt *sintetice a priori,* el ne-a relevat adevărata lor natură. Acest lucru merită să fie repetat şi astăzi, deoarece adesea el nu este recunoscut. Deşi Kant a greşit în ce priveşte aritmetica, aceasta, cred eu, nu poate micşora în mod serios valoarea operei sale. El a vrut să arate că există judecăți sintetice a priori; dacă ele apar numai în geometrie sau se găsesc şi în aritmetica, aceasta este un lucru de mai mică importanță" (Frege [1, p. 89]). Şi chiar mai mult, Frege [1], recunoaşte lui Kant meritul de a fi identificat în *propozițiile sintetice a priori* natura geometriei (în această privință el însuşi este justificat de cercetările fundaționale, în contrast cu reprezentanții empirismului logic). Geometria se întemeiază pe intuiție cum a afirmat Kant, recunoaşte Frege, axiomele ei rămânând relevante pentru orice este intuibil spațial: „Pentru țelurile gândirii

conceptuale putem întotdeauna presupune contrariul uneia sau alteia dintre axiomele geometrice, fără a ajunge la o autocontradicție, atunci când ajungem la astfel de concluzii care contravin intuiției noastre. Faptul că aceasta este posibilă arată că axiomele geometriei sunt independente una de alta şi de legile primitive ale logicii şi că, deci, ele sunt sintetice". Frege însă nu a împărtăşit concepția lui Kant despre aritmetică, considerând că „invocăm prea uşor intuiția noastră lăuntrică atunci când nu putem indica vreun alt temei" (cf. Frege [1, 12]). Aserțiunile kantiene despre natura aritmeticii sunt mai puțin inteligibile în optica lui Frege şi el face referitre la celebrul exemplu din Kant [1, 2] „7 + 5 = 12". Kant spune că atunci când efectuăm adunarea acestor numere trebuie să chemăm în ajutor intuiția corespunzătoarte pentru unul dintre ele, de exemplu 5 degete ale noastre, fapte ce îi permite să conchidă că judecățile aritmetice sunt totdeuna sintetice, lucru cu atât mai valabil când este vorba de numere mari. Este totuşi absurd să stabileşti cu ajutorul intuiției a 173.527 degete egalitatea „13.5664 + 37.863 = 173.527". Ori, acest fapt vine în contradicție cu aserțiunea explicită a lui Kant deoarece ar urma să doctrina kantiană este aplicabilă numai numerelor mici şi nu şi celor mari; dacă demonstrarea formulelor cu numere dincolo de 10 se poate realiza fără intuiție, atunci de ce nu s-ar putea întâmpla acest lucru şi pentru numere mai mici? Aritmetica nu se referă la, şi nu se bazează pe, degete, după cum nu se poate afirma că geometria se referă la (chiar dacă operează cu) puncte, linii şi plane; nici o intuiție nu poate garanta aplicabilitatea adevărurilor aritmetice la toate lucrurile care se numără. Frege [1] a respins doctrina kantiană după care adevărurile aritmetice sunt derivate din intuiție. Raționamentul fregeean este următorul: dacă adevărurile aritmetice sunt derivate prin intuiție, atunci aceste adevăruri sunt independente între ele şi de legile logicii, aşa cum este cazul axiomelor lui Euclid; însă dacă negăm vreuna din propozițiile aritmeticii, rezultatul nu va fi un nou sistem de aritmetică. În viziunea lui Frege, aritmetica este mai adâncă decât ştiințele empirice şi geometria, căci domeniul *numărabilului* este mai întins decât toate şi nu poate fi *intuit* ci numai *gândit*, concluzie care trimite la conexiunea legilor aritmetice

cu cele ale gândirii, relevate de logica care poate oferi *fundația* matematicii.

Dar, dacă Frege a contesta rolul intuiției în fundarea aritmeticii, Brouwer, întemeietorul intuiționismului matematic contemporan, co-autor, alături de Kant, al „mitului doctrinei generale a intuiției ca sursă infailibilă a cunoașterii", susține un punct de vedere diferit, dacă nu, chiar, opus celui al logicianului german, Brouwer considera că mai curând doctrina kantiană asupra intuiției pure a spațiului poate fi supusă criticii și corecției în lumina geometriilor neeuclidiene și chiar abandonată. K. R. Popper [2, p. 353] scrie: „Nu avem nevoie de ea (intuiția pură a spațiului) întrucât noi putem aritmetiza geometria: putem lua ca fundament teoria aritmeticii a lui Kant și doctrina sa că aritmetica este întemeiată pe intuiția pură a timpului". Oricum, reținem că ambele feluri de intuiție ce au stat la baza celor două discipline matematice – aritmetica și geometria – au fost subminate de evoluțiile metodologice și conceptual-teoretice ale cunoașterii. Dar, pentru Kant intuiția era o sursă infailibilă a cunoașterii, îndeosebi, matematice, și avea veritabile antecedente istorice. Cum am arătat și în Țurlea [1], Kant urmează în această privință pe Plotin (de la care preia dihotomia „*intuiție*" și „*gândire discursivă*"), și va accentua contrastul dintre acestea. Și, deși observă că geometria lui Euclid folosește „intuiția pură", discursul „*Elementelor*" înaintează prin demers discursiv, adică deducție logică. Kant [2] subliniază ideea că axiomele matematicii se bazează pe intuiția pură, prezentă în „orice pas al demonstrației geometrice" și considerații analoage face și pentru aritmetică.

Termenul „*intuiție*" este central în teoria kantiană a cunoașterii matematice (Kant [1], [2]). Kant spune că „cunoașterea matematică este cunoașterea obținută de rațiune prin construirea conceptelor". Pentru Imm. Kant „a construi un concept înseamnă a prezenta a priori o intuiție care corespunde conceptului". J. Hintikka [3, p. 162] interpretează aceste aserțiuni kantiene relevante pentru epistemologia sa a matematicii în maniera următoare: „Construcția este echivalentă cu trecerea de la un concept general la o intuiție care reprezintă conceptul cu condiția ca

aceasta să se realizeze fără apel la experienţă". Intuiţia are la Kant în această parte sensul de „ceva care reprezintă sau stă pentru un obiect individual", „de idee particulară în opoziţie cu conceptele generale", de „obiect singular"; în intuiţie „nu se ia în consideraţie decât actul construirii conceptului"; pe scurt, „intuitivitate înseamnă individualitate". În expunerea trancendentală din „Estetica transcendentală" („Critica raţiunii pure") Kant a identificat intuiţia cu facultatea umană a percepţiei, iar pentru el legătura dintre intuiţie şi sensibilitate nu are ceva evident, ci care trebuie demonstrat, deoarece se pot concepe alte fiinţe care pot să aibe intuiţii, şi pe alte căi decât simţurile. Problema care i-a reţinut atenţia lui Kant a fost: cum se explică faptul că cunoaşterea obţinută din intuiţii este aplicabilă întregii experienţe? Credinţa lui Kant era că facultatea sensibilităţii ca sursă a legăturii dintre reprezentanţii individuali şi conceptele generale asigura aplicabilitatea argumentelor matematice la întreaga experienţă, iar modalitatea concretă ar fi admiterea faptului că «noi am pus» proprietăţile şi relaţiile cu care au de-a face aceste argumente ori,aceste argumente au de-a face cu proprietăţi şi relaţii ale obiectelor individuale. Singura cale prin care noi putem pune proprietăţile şi relaţiile matematice cerute în toate obiectele individuale este prin simţurile noastre. Aristotel [1], cu multe secole înaintea lui Kant, susţinuse că percepţia sensibilă este capabilă să prindă particularii". Şi Hintikka [3, p. 131–132] conchide: „De aici decurge, pare să fi gândit Kant, că întreaga noastră cunoaştere a obiectelor individuale care li se aplică acestora universal şi necesar este într-adevăr asupra proprietăţilor şi relaţiilor pe care noi înşine «le-am pus» în obiecte în actul senzaţiei. După cum am văzut aceasta este tocmai conclizia principală a lui Kant privind cunoaşterea matematică". O concluzie care îi apare lui Hintikka nejustificată, căci el continuă: „Mi se pare că veriga cea mai slabă în argumentarea lui Kant este supoziţia aristotelică după care noi putem avea cunoaşterea particularilor numai în percepţia sensibilă. Acesta este un lucru natural admis numai atâta vreme cât noi concepem cunoaşterea umană ca o afacere mai degrabă pasivă, ca o înregistrare a informaţiei pe care noi o primim din afară. Această supoziţie aristotelică ignoră

complet activitățile pe care noi în realitate le realizăm pentru a obține cunoaşterea asupra obiectelor individuale. Mi se pare că Imm. Kant ar fi trebuit să se concentreze asupra acestor activități mai degrabă decât asupra înregistrării senzațiilor. Este instructiv de notat că realmente Kant vorbeşte despre «obiecte ce ne sunt date în senzații»... Dacă am dreptate, atunci eşecul real al lui Kant în teoria sa a matematicii i se datorează, ironic spus, neîncrederii în propriile sale principii. Deoarece noi ştim că intuiția sa generală a fost aceea de a sublinia aspectele active şi constructive ale cunoaşterii noastre; iar într-un fel aceasta este tocmai ceea ce el a neglijat să facă aici; pare un compliment indirect să se spună că Imm. Kant a eşuat în teoria sa a matematicii în măsura în care punctul său de vedere a fost ne-kantian" (Hintikka [4]).

Pare paradoxal să se reproşeze lui Kant un anumit gen de *neconstructivism* (filosoful care înaintea oricărui alt gânditor a teoretizat despre cunoaştere şi adevăr ca fiind «*construcție*»), de care este responsabil acest «reziduu comtemplativ» – natura pasivă a percepțiilor, element al epistemologiei kantiene, pe de o parte, inspirat de doctrina aristocratică a cunoaşterii ei inductive şi empiriste, iar, pe de altă parte, datorat anumitor premise teoretice şi conceptuale inerente ştiinței contemporane lui.

Dacă a vorbi despre un eşec al teoriei kantiene a cunoaşterii matematice, aşa face Hintikka, este prea mult, oricum, se poate recunoaşte faptul că teoria lui Kant despre sursele cunoaşterii matematice a generat dificultăți în spațiul problematic şi metodologic al filosofiei matematicii, la unele deja ne-am referit. Dacă dimensiunea veritabilă a unei opere se învederează şi prin influența ei, atunci trebuie să recunoaştem că cele trei programe fundaționiste (logicismul, formalismul, intuiționismul), pe care le-a inspirat, au produs rezultate spectaculoase în planul investigațiilor fundațional-metamatematice. Dar, intuiția rămâne, în continuare, partea vulnerabilă a teoriei kantiene a cunoaşterii matematice. Frege a contestat-o pentru fundarea aritmeticii, dar a admis-o pentru geometrie; Brouwer a considerat superfluă intuiția pură a spațiului, din moment ce geometria poate fi aritmetizată; după „detronarea euclidiană"

intuiției aritmetice (pitagoreice) ca urmare a descoperirii «iraționalelor», prin Brouwer, asistăm la «reabilitarea» rolului acesteia din urmă. Geometriile neeuclidiene au invalidat certitudinea oferită de intuiția geometrică (sau a spațiului), iar relativitatea specială din teoria lui Einstein a subminat ideea unui timp unic şi a unei simultaneități absolute pentru intuiția timpului. Destinul ideii de „*intuiție*" a fost contorsionat, antecedentele istorice se află în opera lui Aristotel, Plotin, Sf. Thomas, Descartes, fiind considerată percepție (sensibilă), dar şi viziune la Aristorel, la următorii doi *calea divină* de cunoaştere (*gândirea discursivă* rămânând o *cale umană* de cunoaştere), ca la Descartes să fie considerată o facultate rațională. K. R. Popper [2, p. 365] a descris sintetic şi relevant doctrina kantiană a intuiției spunând că noțiunile noastre rămân goale, sau analitice, până când nu sunt aplicate la materialul care ne este dat de simțuri (intuiția sensibilă), sau dacă se aplică acestui material sunt «concepte construite în intuiția noastră pură a spațiului şi timpului». Intuițiile de spațiu şi timp sunt anterioare şi fundează pe cele sensibile. Dar sistemul invariabil al intuiției de tip kantian, convertit în mitul infailibilității intuiției ca sursă de cunoaştere, a fost puternic infirmat de progresul ştiințific. Doctrina lui Kant, după care geometria determină proprietățile spațiului în mod sintetic şi totuşi a priori şi că există un singur spațiu empiric real şi o singură geometrie, iar matematicienilor le revine menirea să explice şi să justifice unicitatea şi natura sintetic apriori a propozițiilor geometriei, a fost invalidată de evoluția ştiinței cu privire la unicitatea geometriei şi (deci) la legitimitatea intuiției. În Țurlea [1] am expus mutațiile la nivelul intuiției geometrice, set-teoretice etc., datorate unor fenomene remarcabile din ştiință: geometriile neeuclidiene, independența ipotezei continuumului, teorema Löwenheim Skolem. Să conchidem, urmând observații ale lui Charles Parsons [1, p. 147], că la Descartes „*percepția clară şi distinctă*" exprimă evident o *atitudine propozițională* (propositional attitude), în timp ce la Kant aceasta nu joacă un rol central, cel puțin în mod explicit. Charles Parsons [1] face referire expresă la ceea ce s-a numit *concepția filosofică despre intuiția matematică* şi care în liniile ei generale a expus-o pentru prima dată cu

suficientă claritate K. Gödel [1, p. 332]: „Dar, în ciuda îndepărtării lor de experiența sensibilă, noi trebuie să avem ceva asemănător unei percepții a obiectelor teoriei mulțimilor, după cum reiese din faptul că adevărul axiomelor ne constrânge prin el însuşi. Nu văd nici o rațiune pentru care ar trebui să avem mai puțină încredere în acest gen de percepție, adică în intuiția matematică, decât în percepția sensibilă, care ne induce să construim teorii fizice şi să aşteptăm ca viitoarele percepții sensibile să concorde cu ele şi, de altfel, să credem că o chestiune nedecidabilă acum are sens şi poate fi decisă în viitor". Şi Gödel continuă să caracterizeze intuiția matematică, într-un mod diferit de cel aristotelic, cartezian şi chiar kantian, afirmând că „intuiția matematică nu trebuie concepută ca o facultate care ar oferi o cunoaştere *imediată* a obiectelor considerate", ci, mai curând, aşa cum în experiența fizică ne formulăm ideile noastre asupra obiectelor pe baza a ceva dat imediat, tot astfel şi în matematică, trebuie să presupunem acest dat care nu trebuie identificat sau confundat cu senzațiile. „Dat"-ul subiacent matematicii este legat de elementele abstracte conținute în ideile empirice. Să observăm că o atare concepție despre intuiția matematică concordă cu platonismul şi are o relevanță deosebită în discuția de față referitoare la Kant.. Să-l citățm din nou pe Gödel [1, p. 333]: „Nu decurge deloc, totuşi, că datele de acest gen, deoarece nu pot fi asociate cu acțiunea unor anumite lucruri asupra organelor noastre de simț, ar fi ceva pur subiectiv, cum a afirmat Kant. Mai degrabă ele pot reprezenta, de asemenea, un aspect al realității obiective... prezența lui în noi se poate datora unui alt gen de relație dintre noi şi realitate".

Am citat *in extenso* din Gödel, poate cel mai de seamă reprezentant al *platonismului* din secolul nostru (vezi şi Gödel [2]), pentru că modul de concepere a intuiției matematice facilitează înțelegerea multor aspecte ale filosofiei kantiene a matematicii: matematica pură – matematica aplicată, realismul matematic transcendental; realismul transcedental vs. idealismul ontologic şi altele. Să reținem, oricum, analogia pe care K. Gödel o face între percepția senzorială, ca o relație cognitivă cu lumea fizică şi intuiția (ca ceva asemănător percepției), care produce o relație

similară cu obiectele matematice şi, poate, cu alte entităţi abstracte. Ch. Parsons [1, p. 145] comentează textul gödelian în termenii: „Dacă ea (intuiţia matematică) este centrală în filosofia matematicii, ea ar trebui să joace un rol asemănător celui al percepţiei senzoriale în cunoaşterea noastră a lumii cotidiene şi a fizicii". Examinarea discursului gödelian, (K. Gödel [1]), relevă că intuiţia matematică are cert un caracter *de re*, implicând o relaţie a unei persoane cu obiecte matematice. Aşa cum în vocabularul percepţiei senzoriale sunt prezente expresii ca „A vede pe x"; „A aude pe x" etc., ar urma, *mutatis mutandis*, să le transferăm în legătură cu conceptul de „intuiţie matematică". Verbele perceptuale mai sus-menţionate induc un anumit uz (*object-relational uses*). Complementar acestui uz există *propositional attitude uses* şi care dintre acestea două este mai fundamental este încă o problemă controversată, dar, oricum, existenţa lui object-relational use este evidentă. Problema stă diferit, atunci când ne referim la intuiţia matematică şi autori, precum Parsons, recunosc că filosofii nu s-au exprimat clar asupra acestui aspect. Parsons propune să distingem uzurile complementare, anterior descrise, prin expresiile „intuition of" şi „intuition that" şi această distincţie îi ajută lui Parsons [1, p. 146] să identifice o anumită neclaritate în pasajul gödelian citat, şi anume: Gödel afirma că există „ceva asemănător unei percepţii a obiectelor teoriei mulţimilor" şi acest lucru este „văzut din faptul că adevărul axiomelor ne constrânge prin ele însele". Aşadar, se conchide de la caracterul evident al anumitor enunţuri care pot exprima intuiţii „*that*" la existenţa intuiţiilor „*of*". Premisa poate fi disputată, chiar dacă inferenţa este admisă, pare să fie o *non sequitur*. „Intuition *that*" este o temă tradiţională subsumată oricărei concepţii despre evidenţă sau auto-evidenţă a adevărurilor de raţiune, unde aceasta nu este derivată din obicei, practică sau convenţie". Şi exact pentru acest motiv analogia cu percepţia nu admite ilustrarea folosită pentru o explicaţie a unei astfel de evidenţe raţionale, sau poate să marcheze distincţia dintre existenţa propoziţiei autentic evidentă şi aparenţa ei pur şi simplu ca fiind adevărată. La acest punct urmează ca analogia să fie dezvoltată în direcţia „intuition *of*", simplu, din cauza prezenţei unui obiect central pentru percepţie.

Dacă atitudinea lui Descartes condensată în a lui „percepție clară și distinctă" este în principal cert o „propositional attitude", Kant și Husserl promovează o concepție despre intuiție ca fiind angajați privind „intuition *of*" și unde obiectele pot fi chiar matematice; cel puțin, așa cum am mai spus, la Kant „propositional atitude" nu are un rol explicit. „Intuition *of*" decurge, însă, chiar din definiție, deoarece o intuiție este o reprezentare singulară care, evident, este o reprezentare a unui obiect singular. Kant [2] spune că prin intuiție cunoașterea are o „relație imediată" cu obiectele, iar aceasta înseamnă o prezență directă a obiectului în gândire, ca în percepție. Intuiția furnizează o evidență imediată propozițiilor, ca de exemplu, celor ale geometriei. Parsons [2] acreditează ideea că nu se justifică controversa privind faptul că după Kant „intuiția" (în particular „intuiția *a priori*"), conferă evidență care este imediată. Caracterul imediat al evidenței, desigur, nu ar trebui redus la singularitate, cum propune Hintikka.

Intuiție la Kant are clar caracterul de „intuition *of*", iar Husserl [1] operează în fenomenologia sa cu o „*intuiție categorială*", adică o intuiție a esențelor, și în *Ideen* (Husserl [2]) încearcă să dezvolte o teorie a evidenței raționale bazată pe analogia cu percepția, percepția fiind a unui obiect, constituind, o trăsătură distinctivă a concepției sale. Și, deoarece Husserl a înțeles evidența rațională ca intuiție, el a întreprins un demers explicativ unitar al celor două feluri de intuiție: „intuition *of*" și „intuition *that*". Dacă ideile husserliene au avut impact asupra concepțiilor lui Weyl și Gödel, filosofia kantiană a fost considerabil mai influentă în sfera fundamentelor matematicii, ca și a filosofiei actuale a matematicii. Caracterul intuitiv al *matematicii finitare*, descrisă de concepția lui Hilbert, s-a bazat pe filosofia kantiană, în particular pe *intuiția pură*, așa cum a fost aceasta configurată în teoria lui Kant despre geometrie și, poate, mai puțin pe teoria lui a aritmeticii; în ceea ce privește intuiționismul, acesta a reținut noțiunea kantiană de timp ca formă a simțului intern. Gödel [3] spune textual că, ceea ce Hilbert înțelege prin „*Anschaung*" (intuiție) este, în mod esențial, intuiția spațio-temporală a lui Kant, limitată la configurații de un număr finit de obiecte discrete: acest fel de intuiție, în contradicție cu noțiunea de intuiție din Gödel [1], este numită *intuiție concretă*.

4.3. NATURA ARGUMENTELOR MATEMATICE, A RAȚIONAMENTULUI MATEMATIC; MATEMATICĂ PURĂ ŞI MATEMATICĂ APLICATĂ

Sensurile III (c)-(d) ale analiticității din lista lui Hintikka [3], în fapt, sunt, consideră însuşi autorul, variațiuni pe ideea fundamentală III şi oferă o reconstrucție adecvată a noțiunii kantiene de analiticitate cu care a operat filosoful german în filosofia matematicii. Kant considera că esența metodei matematice constă în folosirea individualilor, distincți de conceptele generale, şi care confereau caracter sintetic argumentelor matematice. Un termen relevant în filosofia matematicii, dar specific kantian, este cel de *construcție*, pe care el îl definea în „*Critica rațiunii pure*" ca „*introducere*" sau „*expunere*" *a priori* a unei *intuiții* ce corespunde *conceptului general*. Prin intuiție la Kant se înțelege reprezentantul unui individual. Prin urmare, refăcând caracterizarea de mai sus, o *construcție* (matematica construieşte concepte) în sens kantian este introducerea (*a priori*) a unui reprezentant al unui individual pentru a ilustra un concept general, idee, deja prezentă în Kant [1]; matematicienii consideră conceptele generale *in concreto*, adică prin instantele lor individuale. Şi, cum deja am reținut că în altă parte, Hintikka [4] propune interpretarea „*intuitivitate* = *individualitate*", înțelegem analogia de concepție asupra naturii raționamentului matematic între Descartes şi Kant.

Sensul III (din lista lui Hintikka) are legătură directă cu filosofia matematicii a lui Kant. Dintre întrebările interesante, provocatoare şi fertile în investigația filosofiei kantiene a matematicii, Hintikka menționează următoarele: „Sunt modurile de argumentare pe care Kant le considera a fi tipic matematice, dar pe care noi astăzi le clasificăm ca aparținând teoriei cuantificării, realmente sintetice în sensul III, cum credea Kant?". Hintikka amână răspunsul la această întrebare, dar ştim că în alte prelegeri el l-a justificat pe Kant cu ajutorul logicii cuantificării.

Grupul al II-lea al sensurilor analiticității, remarcă Hintikka, reprezintă o foarte bună *reconstrucție* a noțiunii kantiene de *analiticitate*,

aşa cum filosoful german a folosit-o în filosofia matematicii. Iată acum prezentarea acestui grup: (Cf. Hintikka [3, p. 162]): „III". Un pas argumentativ este analitic dacă el nu introduce noi individuali în discuție; III(a) Un argument analitic nu poate conduce de la existența unui individual la existența unui individual diferit; III(b) Un pas argumentativ este analitic dacă el nu sporeşte numărul individualilor consideraţi în relația lor reciprocă; III(c) Un pas argumentativ este analitic dacă gradul concluziei nu este mai mare decât gradul a cel puțin uneia dintre premise; III(d) Un argument este analitic dacă toți paşii lui sunt analitici în sensul III(c); III(e) O demonstrație a enunțului S_1 din S_0 este analitică dacă nici un enunț care apare ca stadiu intermediar al acestei demonstrații nu are grad mai înalt decât S_0 şi S_1. (Prezentăm, fiind necesar în discuție şi) Sensul IV: Un pas argumentativ este analitic dacă informația adusă de concluzie nu este mai mare decât informația adusă de premise (Adevărul analitic este adevărul tautologic)". Aşadar, ceea ce este esențial de notat pentru întregul grup III este următorul aspect: „o inferență este analitică dacă în ea se analizează doar interrelațiile individualilor care au fost deja menționați în premise, fără a «trece dincolo» de ei, în sensul considerării altor individuali".

Analiza unui enunț relevă că gradul lui este dat de numărul maxim al individualilor consideraţi împreună în relația lor reciprocă, în orice parte a enunțului. Formal, gradul unui enunț cuantificațional este alcătuit din suma a doi membri – numărul termenilor singulari liberi conținuți în el şi numărul diferitelor straturi de cuantificatori pe care îi conține şi care constituie adâncimea lui (Cf. Hintikka [3]).

Prezentăm, după Hintikka [3, p. 163–185], unele rezultate din logica cuantificării care reabilitează noțiunea de *sintetic a priori*, centrală în filosofia kantiană a matematicii, relevantă despre natura inferențelor, în general spus, a propozițiilor matematicii, noțiune despre care unii membri ai Cercului de la Viena, lansând dihotomia „analitic-sintetic", supranumită de Quine [1] o „dogmă a empirismului", au vorbit în termenii „*dizolvării*" ei.

Orice enunț cuantificațional consistent are o formă normală distributivă, o disjuncție a anumitor conjuncții numite „constituenți",

formă normală ce este o generalizare a ceea ce este cunoscut ca fiind formă normală disjunctivă completă a logicii propoziționale; fiecare constituent care nu are nici un termen singular posedă structura:

$$1) \quad (Ex)C_1(x) \wedge (Ex)C_2(x) \wedge ... \wedge (Ex)C_n(x) \wedge (Ux)[C_1(x) \vee C_2(x) \vee ... \vee C_n(x)]$$

în care $C_i(x)$, dacă constituentul respectiv nu are adâncimea unu, are iarăşi o asemenea structură, care este reprezentativă pentru structura constituienților, în general. „În cazul general, membrii adiționali înşişi ai construcției (1) sunt conjuncții de enunțuri atomare negate şi nenegate. În plus, în cazul general pot fi prezenți în enunțurile $C_i(x)$ termeni singulari liberi. Diferența principală dintre formele normale distributive ale logicii propoziționale şi ale teoriei cuantificării monadice (1-ară), pe de o parte, şi cazul general (constituenți de adâncimea doi sau mai mult), pe de alta, este aceea că, în cazul general, unii dintre constituenți sunt inconsistenți. Acest fapt se vede imediat că este relevant pentru unul din sensurile analiticității. Dacă (1) este inconsistent, negația sa este logic adevărată. Această negație se observă repede că este echivalentă cu enunțul următor:

$$2) \quad [(Ex)C_1(x) \wedge (Ex)C_2(x) \wedge ... \wedge (Ex)C_n(x) \supset \supset (Ex) \sim C_1(x) \wedge \sim C_2(x) \wedge ... \wedge \sim C_n(x)]$$

Enunțul (2) oferă posibilitatea de a infera existența unui individual de un gen anumit din existența unui număr de individuali diferiți de el, având proprietăți diferite, adică autorizează o inferență inter-individuală. Această inferență şi enunțul (2) sunt sintetice în sensul III(a), sens caracteristic pentru filosofia lui Kant. Un adevăr este sintetic în sensul III(a) dacă el apare prin eliminarea constituenților inconsistenți şi, din acest punct de vedere, se poate spune că multe dintre adevărurile logicii cuantificării sunt sintetice. Inconsistența lui (1) este independentă de inconsistența posibilă a enunțurilor $C_i(x)$ care apar în (1), deci nu datorită trivial inconsistenței unuia dintre constituenți. Cazurile triviale apar ca „paraziți" ai cazurilor netriviale, conchide Hintikka, şi de aceea ca tipice. Implicația (2) este uneori logic adevărată, numai deoarece conjuncția sa antecedentă este logic falsă, şi atunci un număr de enunțuri de forma

$(Ex)C_1(x)$ care apar în (1) vor fi incompatibile. „Să admitem că $(Ex)C_1(x)$ ... $(Ex)C_m(x)$ nu sunt incompatibile, dar că devin incompatibile dacă $(Ex)C_{m+1}(x)$ le este adăugat. Atunci implicația:

3) $[(Ex)C_1(x) \wedge ... \wedge (Ex)C_m(x)] \supset \sim (Ex)C_{m+1}(x)$

este logic adevărată, deşi antecedentul ei nu este inconsistent". (Hintikka [3, p. 165]).

Implicația (3) se dovedeşte, conform expunerii lui Kant, o instanță a adevărului sintetic, adică de fapt un argument analitic nu poate conchide de la existența unui individual sau a unui număr de individuali la existența sau non-existența unui individual diferit. Se obține reliefarea unei conexiuni între sensul III(a) al analiticului şi sinteticului, pe de o parte, şi inconsistența unor anumiți constituenți, pe de altă parte. Hintikka a descris procesul prin care fiecare constituent inconsistent se poate arăta că este inconsistent, procedeul constând în „expansiunea" constituentului dat într-o disjuncție de constituenți cu aceleaşi simboluri predicative şi aceiaşi termeni singulari liberi, însă cu adâncimi care cresc; constituenții care apar în cadrul acestui proces sunt subordonați celui original în cadrul procesului de expansiune. Dar, mulți paşi ai procesului sunt inofensivi; folosim reguli de convertire a unui enunț în forma sa distributivă şi reguli care produc creşterea în adâncime a constituenților, adăugându-se un nou strat de cuantificatori, pe când termenii singulari rămân aceiaşi. Adăugând orice parte trivială redundantă unui constituent este servit acest scop în măsura în care adâncimea constituentului creşte cu 1. Hintikka observă că această trivialitate ne-ar sugera, să spunem, că fiecare stadiu diferă de predecesorul său numai prin faptul că are o adâncime mai mare şi deci un grad mai înalt. Ori, creşterea gradului înseamnă creşterea numărului individualilor considerați în relația lor, ceea ce conform cu III(b) şi III(d) indică o procedură sintetică şi deci, procesul expansiunii, prin care constituenții inconsistenți sunt arătați a fi inconsistenți este o procedură sintetică în aceste sensuri; urmează că această metodă de demonstrație în termenii formelor normale distributive şi a le expansiunii lor este sintetică în sensul III(e). Procedura operează în această manieră: pentru a deriva S_2 din S_1 le transformăm în formele lor normale distributive; se poate admite că fiecare

din ele conțin toți termenii singulari liberi care apar în S_1 sau în S_2. Putem demonstra S_2 din S_1 dacă şi numai dacă expansiunea formei normale a lui S_2 va conține la o anumită adâncime expansiunea formei normale a lui S_1, atunci când sunt omişi constituenții inconsistenți din expansiune prin criteriile admise. Procedurile de demonstrație sau de respingere sunt sintetice atunci când o demonstrație nu se realizează prin eliminarea nici unui constituent inconsistent, sau când o demonstrație nu se realizează prin eliminarea constituenților inconsistenți cu ajutorul primei ridicări a adâncimii. *Sinteticitatea* este apreciată de Hintikka ca o caracteristică a demonstrațiilor cuantificaționale. Existența unei forme normale distributive – rațiunea pentru care adevărurile logice ale teoriei cunatificării sunt analitice în sensul IV – este legată cu rațiunea pentru care aceleaşi adevăruri sunt sintetice în alt sens, adică nu sunt „capturate" de regulile naturale de inferența în sensul III(e). Şi Hintikka [3, p. 170–171] formulează următoarea concluzie: „Putem acum să-l justificăm pe Kant. Ceea ce înțelegea el când considera că argumentele matematice sunt normal sintetice era perfect just. Prin argumente matematice el înțelegea, în primul rând, modurile de aserționare care sunt astăzi tratate în teoria cuantificării. Dar, tocmai s-a văzut că multe moduri de raționare cuantificaționale sunt inevitabil sintetice într-un sens natural al cuvântului. Acest sens este, de altminteri, strâns legat de intențiile lui Kant, deoarece s-a arătat în prima mea expunere că grupul III al sensurilor analiticității poate fi considerată ca o foarte bună reconstrucție a noțiunii kantiene a analiticității, aşa cum a utilizat-o Kant în filosofia matematicii".

În lumina distincției *tautologie de suprafață* şi *tautologie de adâncime* se poate răspunde la întrebarea, dacă adevărurile logice sunt tautologii. Luând teoria cuantificării cu un *caz-test*, atunci adevărurile logice ale acestei teorii sunt toate tautologii de adâncime, dar nu sunt tautologii de suprafață. Coerent cu o asemenea afirmație avem rezultatul după care „concepția acelor filosofi care consideră că argumentele matematice nu sunt analitice în sensul de a fi doar «explicative» este astfel cel puțin parțial justificată. Deoarece nici chiar toate acele argumente matematice care pot fi formalizate în teoria cuantificării nu

sunt tautologii în sensul de a fi tautologii de suprafață" (Hintikka [3, p. 177]). Şi deoarece există între *informația de adâncime* şi cea de *suprafață* relația: când prima tinde către infinit, cea de suprafață o aproximează la limită (este vorba de informația unui enunț) se arată că în teoria monadică a cuantificării cele două noțiuni coincid. Exemplele de adevăruri logice date de filosofi dinaintea lui Frege aparțineau teoriei monadice a cuantificării şi din faptul că noțiunile de tautologie de suprafață şi tautologie de adâncime coincid, s-a dedus că adevărurile logice ar fi tautologice, neinformative, într-un sens mai tare decât IV. Unii filosofi au realizat că există moduri de argumentare valide ne-tautologice în sensul informației de suprafață şi Kant este unul dintre ei. Poziția ilustrată de Kant a constat în restrângerea adevărurilor logice la teoria monadică a cuantificării – silogistica tradițională şi în catalogarea celorlalte moduri de raționare cuantificaționale ca matematice. Şi Hintikka [3, p. 178] explicitează implicația filosofică şi istorică, care îl vizează direct pe Kant în termenii: „Dacă se face astfel, atunci se poate spune, desigur, că adevărurile logice sunt doar explicative (tautologice), pe când raționamentul matematic este normal informativ, cu condiția, desigur, ca termenii «explicativ», „tautologic» şi «informativ» să se admită că se referă la informația de suprafață".

O asemenea interpretare, ca cea propusă de Hintikka, înregistrează contrastul dintre ideile de mai sus şi sensurile moderne I(b)–(d) ale analiticității şi subliniază că este vorba doar de o asemănare, aparentă, între concepția lui Kant şi concepțiile moderne bazată pe conexiunea dintre noțiunea de adevăr analitic şi cea de adevăr logic, uitându-se că de fapt filosoful german înțelegea prin „*logică*" ceva diferit de ceea ce înțeleg autorii moderni. Peirce, *apud* Hintikka [3], a făcut o interesantă remarcă după care, dacă Imm. Kant ar fi fost contemporan cu logica contemporană a relațiilor, şi-ar fi schimbat concepția referitor la relația dintre matematică şi logică. Indistincția «*tautologie de adâncime*» şi «*tautologie de suprafață*» a inspirat doctrina eronată asupra raționamentului logic, demonstrației matematice şi a adevărului matematic. Considerând raționamentul logic tautologic în ambele sensuri – *de adâncime* şi *de suprafață* – C. G. Hempel [2] formulează unele

remarci eronate despre natura adevărului matematic: „Întrucât toate demonstrațiile matematice se bazează exclusiv pe deducții logice din anumite postulate, decurge că o teoremă matematică, cum ar fi teorema lui Pitagora în geometrie, nu asertează nimic *obiectiv* sau *teoretic* nou în comparație cu postulatele din care este derivată, deşi conținutul ei poate fi foarte bine să fie *psihologic* nou în sensul că noi nu am avut cunoştința cunoaşterii ei implicite în postulate".

Cercetările din logica modernă a cuantificării au produs mutații istorice privind statutul adevărurilor logice ca legi ale gândirii, căci majoritatea lor s-au dovedit a fi sintetice în sensul III; pare a fi o conexiune istorică, remarcă Hintikka, între ideea caracterului necesar al conexiunilor logice şi ideea că ele sunt analitice în sensul III. De exemplu, există o mare asemănare între maniera în care Kant explică noțiunea sa de adevăr analitic şi modalitatea în care Descartes explică noțiunea sa a *conexiunii necesare*. În ambele cazuri, o concluzie decurge din premise în maniera dorită, dacă şi numai dacă ea este implicată în conceptul premisei în aşa fel încât ultimul nu poate fi conceput distinct fără a gândi de asemenea şi pe primul. Unele dintre exemplele lui Descartes sunt de asemenea foarte apropiate de cele ale lui Kant. Să încheiem cu o succintă referire la faptul că conceptul problematic şi dificil al *intuiției* cu tot cortegiul ambiguităților care îl însoțeşte este un component central al raționamentului matematic în concepția ambilor gânditori. Kant a pretins că matematicienii consideră conceptele generale *in concreto*, deci prin instanțele lor individuale, cu alte cuvinte, că ei folosesc în mod tipic intuițiile pentru a reprezenta conceptele generale, *construcția matematică* a conceptelor în absența lor fiind imposibilă.

4.4. FILOSOFIA KANTIANĂ A ARITMETICII

Filosofia kantiană a matematicii a inspirat programe fundaționiste ale matematicii divergente şi chiar rivale: logicismul fregean, formalismul hilbertian sau intuiționismul brouwerian, ceea ce indică fecunditatea apriorismului, înrădăcinată într-o tradiție, ce emerge de la grecii vechi şi

până încoace, ce a considerat, cum deja am notat, că matematica este o ştiinţă apriori, ale cărei propoziţii nu cer pentru stabilirea lor referinţă la experienţă. Caracterul apriori al matematicii a fost contestat de concepţia inductivist-empiristă, de J. S. Mill.

Desigur, trăsătura caracteristică de a priori ce o posedă matematica pură (aritmetica pură şi geometria pură), deşi este relevantă, singură nu ne poate da o explicaţie satisfăcătoare a naturii matematicii. Răspunsul lui Kant la întrebarea despre natura matematicii pure a fost în esenţă acesta: propoziţiile aritmeticii pure şi ale geometriei pure sunt propoziţii necesare, dar nu analitice, ci sintetice a priori. Pe scurt, citându-l pe Körner [1, p. 39], „ele sunt sintetice pentru că sunt despre structura spaţiului şi timpului, structură care se dezvăluie prin ceea ce poate fi construit în ele, şi sunt *a priori* pentru că spaţiul şi timpul sunt condiţii invariante ale oricărei percepţiei a obiectelor fizice". Şi cum aici avem în vedere matematica pură (aritmetica pură şi geometria pură), să notăm că aceasta are ca obiect structura spaţiului şi timpului independent de materialul empiric.

Kant nu disociază în abordare între propoziţiile aritmeticii pure şi cele ale geometriei pure. Aşa cum însuşi Kant [1, §10] spunea, propoziţia dacă adăugăm 5 unităţi la 7 unităţi producem 12 unităţi descrie în mod sintetic şi a priori ceva construit în timp şi spaţiu, anume succesiunea de unităţi şi colecţia lor. Sistemele de propoziţii aritmetice şi geometrice nu sunt descrieri ale timpului perceptual şi ale spaţiului perceptual şi deci, posibilitatea logică a aritmeticilor alternative nu este negată.

Filosofia kantiană a aritmeticii poate fi derivată din filosofia gânditorului german despre natura matematicii. În acest ansamblu epistemologic se decelează două aserţiuni: a) toate judecăţile matematice sunt sintetice; b) judecăţile matematice autentice sunt judecăţi a priori şi nu empirice (cf. Kant [2, p. 51, 52]). Kant observă că analiştii raţiunii omeneşti n-au sesizat valoarea şi relevanţa primei aserţiuni: „Căci găsindu-se că raţionamentele matematicienilor procedează toate conform principiului non-contradicţiei (ceea ce e cerut de natura oricărei certitudini apodictice) s-a ajuns la convingerea că şi principiile ar fi

cunoscute pe baza principiului non-contradicției; în aceasta ei se înşeală, căci o judecată sintetică poate fi cunoscută fără îndoială potrivit principiului non-contradicției, dar numai cu condiția de a se presupune o altă judecată sintetică din care să poată fi dedusă, dar niciodată în sine". În ceea ce priveşte aserțiunea (b), argumentul lui Kant este următorul: judecățile matematice sunt a priori şi nu empirice „deoarece conțin în sine necesitate, care nu poate fi scoasă din experiență. Dacă însă nu se va admite aceasta, ei bine, atunci restrîng judecata mea la matematica pură, al cărei concept cere ca ea să nu conțină cunoştință empirică, ci numai cunoştință pură a priori".

Dar, concpția lui Kant despre natura matematicii pure şi a statutului propozițiilor acesteri ştiințe suferă o „specializare" convingătoare, atunci când este ancorată pe terenul aritmeticii pure. Este cazul analizei celebrului exemplu „7 + 5" (Kant [1, p. 32], [2, p. 52, 53]). Kant [2, p. 52, 53] scrie: „S-ar putea crede fără îndoială la început că judecata „7 + 5" este o judecată pur analitică, care rezultă din conceptul sumei de şapte şi cinci în virtutea principiului contradicției. Totuşi, dacă o privim mai îndeaproape, găsim că conceptul sumei de 7 şi 5 nu conține nimic mai mult decât unirea celor două numere într-unul singur, prin care nu se gândeşte câtuşi de puțin care este acel număr unic care le cuprinde pe amândouă. Conceptul de doisprezece nu este câtuşi de puțin gândit, prin faptul că eu gândesc pur şi simplu acea reunire de şapte şi cinci, şi oricât de mult aş analiza conceptul pe care îl am despre o astfel de sumă posibilă, totuşi nu voi găsi în el pe cel de doisprezece. Trebuie să depăşim aceste concepte, luând în ajutor intuiția care corespunde unuia dintre cele două concepte, de exemplu, cele cinci degete ale mâinii noastre sau (ca Segner în aritmetica lui) cinci puncte şi adăugând astfel una câte una unitățile lui cinci date în intuiție la conceptul de şapte. Eu iau mai întâi numărul 7, şi ajutându-mă, pentru conceptul de 5, de degetele mâinii mele ca intuiție, adaug, atunci una câte una la numărul 7 cu acel procedeu figurativ, unitățile pe care mai înainte le reunisem pentru a forma numărul 5, şi văd astfel rezultând numărul 12. Că 5 trebuie să fie adăugat la 7, am gândit ce-i drept în conceptul de sumă: 7 + 5, dar nu că această sumă

este egală cu numărul 12". Şi argumentarea lui Kant conchide în termenii că judecata aritmetică este deci totdeauna sintetică, convingându-ne de acest lucru mai clar când operăm cu numere mai mari; „atunci este evident" – scrie Kant [2] – „că oricum am învârti şi răsuci conceptele noastre, nu am putea niciodată găsi suma cu ajutorul simplei analize, a conceptelor noastre, fără a recurge la intuiție".

Am văzut, într-un paragraf anterior, care a fost atitudinea lui Frege față de epistemologia kantiană a aritmeticii şi anume, logicianul de la Jena nu a împărtăşit concepția lui Kant despre natura aritmeticii, şi, în mod explicit, i-a reproşat filosofului german că a invocat prea uşor intuiția acolo unde nu a putut indica un temei autentic. Frege a observat inaplicabiltiatea intuiției atunci când se operează cu numere mari, întrebându-se de ce nu s-ar putea demonstra formule cu numere mai mici decât 10 (numărul degetelor mâinilor noastre suport al aplicării intuiției) fără apel la intuiție, convingerea lui, oarecum ironică, fiind că „*aritmetica nu se bazează pe degete*".

În contrast cu atitudinea lui Frege, de contestare a rolului intuiției în fundarea aritmeticii, olandezul Brouwer se va situa alături de Kant (în susținerea că intuiția este o sursă infailibilă a cunoaşterii (matematice). Acesta a admis mai curând că intuiția spațiului trebuie criticată şi corectată în lumina relevanței geometriilor neeuclidiene şi, în consecință, se poate dovedi chiar dispensabilă în virtutea aritmetizării geometriei. Astfel, se poate accepta numai intuiția timpului din doctrina kantiană, pe care o putem aşeza drept fundament al aritmeticii, un tip de intuiție, supus şi el, cum se ştie, unor semnificative subminări datorate recentelor evoluții conceptuale şi metodologice ale cunoaşterii matematice.

În ceea ce îl priveşte pe Hilbert, acesta va folosi *sui generis* intuiția ca o *percepție* (în sens kantian) *a semnelor pe hârtie*, restrângând considerațiile metamatematice asupra ansamblurilor perceptuale cu caracter finitar. Dar, acest aspect trimite la problema infinitului în matematică, *problemă tulburătoare pentru gândirea umană*, cum spunea însuşi D. Hilbert, şi *radicală*, căci a contribuit la divizarea şcolilor din cadrul filosofiei matematicii.

Analiza kantiană a *problemei infinității* amintește de influențe ale doctrinei aristotelice despre distincția dintre *infinitatea actuală* și *cea potențială*. Comentând concepția lui Kant despre infinitul matematic, Körner [1, p. 40] scrie: „Într-un șir sau progresie matematică, o regulă ne spune cum să facem fiecare pas, după ce am făcut pasul precedent. Kant nu va tolera însă supoziția că atunci când este dată o astfel de regulă, este dată în mod necesar și totalitatea pașilor într-un anumit sens. Problema este deosebit de importantă pentru cazurile când nu există un ultim pas și nu există nici un prim pas. Să considerăm, de exemplu, șirul numerelor naturale, care are ca prim element pe 0 și în care fiecare element este produs prin adăugarea lui 1 la predecesorul său, presupunându-se că nu există alte elemente în șir. Șirul crescător conform regulii este cu totul altceva decât șirul complet; afirmația că procesul de producere a elementelor șirului poate fi continuat în mod indefinit, nu atrage după sine ideea că șirul poate fi terminat sau că șirul terminat poate fi considerat în acest sens dat".

Dacă între concepțiile lui Kant și Aristotel referitoare la *infinitatea potențială* sau *în devenire* identificăm evidente similitudini, cu privire la *infinitatea actuală*, aceste concepții diverg semnificativ. Aristotel a susținut că un reprezentant al infinității actuale nu este identificabil în experiența senzorială și, chiar mai mult, existența acestuia este imposibilă logic. Stagiritul (ca și Toma din Aquino) va încerca să demonstreze existența unei cauze prime, argumentând „că altfel ar trebui să existe un șir *actual*, ceea ce, susține el, ar fi absurd din punct de vedere logic". Ori, filosoful german consideră că noțiunea de infinitate actuală nu este imposibilă din punct de vedere logic. Această noțiune este pentru Kant o idee a rațiunii „adică o noțiune coerentă din punct de vedere intern, care totuși nu se poate aplica experienței senzoriale, deoarece nici un reprezentant al ei nu poate fi perceput, nici construit. Opinia lui Kant este că putem construi numărul 2 și putem percepe 2 lucruri; că putem construi numărul $10^{10^{10}}$, chiar dacă nu suntem în stare să percepem un grup așa de mare de obiecte separate și că, în fine, noi nu putem percepe, nici construi o colecție actuală infinită" (Körner [1, p. 41]).

Oricum, rămâne un merit al filosofiei kantiene sublinierea contrastului dintre cele două tipuri de infinitate, acordarea atributului de folositor infinitului actual. În Kant [3, p. 133–134] scrie: „căci în aprecierea matematică a mărimii, intelectul este tot atât de bine servit şi satisfăcut, fie că puterea de imaginaţie alege ca unitate o mărime pe care o putem prinde într-o privire, de exemplu un picior sau prăjină, sau că alege o milă germană sau chiar un diametru al pământului. În amândouă cazurile, aprecierea logică de mărime merge neîmpiedicat la infinit". „Dar mintea înăuntrul ei ascultă de glasul raţiunii care cere totalitate... pentru toate mărimile date... neexceptând de la acest postulat nici chiar infinitul..., ci impunându-se dimpotrivă, în mod inevitabil, de a ni-l gândi... ca dat în întregime (după totalitatea sa)".

4.5. FILOSOFIA KANTIANĂ A GEOMETRIEI: ONTOLOGIA KANTIANĂ A SPAŢIULUI CA O EPISTEMOLOGIE A GEOMETRIEI

Kant implicit a fost de acord cu Leibniz şi Descartes că spaţiul este continuu, infinit, tridimensional, omogen şi izotrop; omogen înseamnă, în acest context, că nu există puncte privilegiate în spaţiu, iar spaţiul izotrop că nu are direcţii privilegiate. Credinţa lui Kant era că punctele conţinute în spaţiu satisfac teoremele geometriei euclidiene.

Problema spaţiului a avut un rol important în dezvoltarea filosofiei critice a lui Imm. Kant. De fapt, aşa cum observă R. Torretti [1] şi alţi autori, în dezvoltarea concepţiilor lui Kant se disting două perioade: o primă perioadă, numită „*pre-critică*", conţine lucrările timpurii ale filosofului (Kant [4], [5]) şi a doua, „*perioada critică*", este caracterizată de celebra sa „revoluţie copernicană în filosofie" încorporată în Kant [2] şi, în special, în capitolul acestei capodopere, „Estetica transcendentală", ediţia 1787, în care a fost elaborată o nouă concepţie despre spaţiu sub impactul unor probleme generate de concepţia din perioada pre-critică.

Kant a respins şi a abandonat concepţia despre spaţiu real infinit subzistând în sine, o *entitate himerică*, şi a susţinut o *teorie relaţionistă* asemănătoare celei a lui Leibniz. Astfel, deja Kant [4, p. 23] scria: „fără forţă nu există conexiune, fără conexiune nu există ordine şi fără ordine nu există spaţiu". Această idee spune explicit că proprietăţile structurale ale spaţiului sunt determinate de interacţiunea dinamică dintre particule, e.g. spaţiul are trei dimensiuni decurge din faptul că forţele de interacţiune sunt invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre particulele care interacţionează. În acest context, Kant, ca şi Leibniz, a considerat distanţa ca proprietate a materiei, aceasta având rol determinant în constituţia spaţiului. Prin urmare, legi diferite de interacţiune „produc" spaţiul care are mai mult sau mai puţin de trei dimensiuni. Kant [4, p. 24] continuă ideea anterioară în termenii: „O ştiinţă a tuturor variatelor feluri posibile de spaţiu va fi în mod cert cea mai înaltă geometrie pe care un intelect (understanding) finit o poate construi".

Mai târziu, Kant a considerat că teoria sa relaţionistă asupra spaţiului nu poate fi susţinută în virtutea considerentului că spaţiul nu este un atribut al materiei, sau un concept. Din punct de vedere ontologic în relaţia spaţiu-lucruri, primul termen deţine prioritatea, proprietăţile lucrurilor depinzând de spaţiu. *„Nucleul absolutist"* al teoriei relaţioniste, împărtăşită temporar de Kant, a generat implicaţii indezirabile şi în Kant [5] el a fost descris ca fiind datorat unei teorii platonice a principiilor cunoaşterii umane. Kant va propune o nouă interpretare a statutului ontologic al spaţiului (şi timpului).

În Kant [5] este expusă *filosofia precritică* a spaţiului şi geometriei care a fost generată de o anumită interpretare a *statutului ontologic al spaţiului: perspectiva pre-transcendentală.* Kant a acceptat ideea că *epistemologia geometriei* depinde de maniera în care noi concepem ontologia spaţiului. Dar, un nou şi remarcabil aspect al concepţiei mature a lui Kant despre matematică – filosofia critică a matematicii – este introdus în Kant [2] şi anume, este vorba de înţelegerea transcendentală a ontologiei spaţiului. Exigenţa unei teorii adecvate a cunoaşterii matematice este intim conectată cu unica sursă a cunoaşterii

directe a obiectului individual şi pe care Kant a numit-o *intuiție*. Intuiția este un aspect-cheie, relevant referitor la natura cunoaşterii matematice, deoarece spațiul nu este un atribut al materiei sau un concept, ci este o intuiție, o *intuiție pură*, *a priori* a sensibilității. Aici se află punctul de plecare în construirea perspectivei de *abordare transcendentală* inițiată de Kant în investigarea naturii matematicii.

Kant a respins dihotomia veche a propozițiilor: propoziții analitice şi propoziții sintetice, aspect central în filosofia lui Leibniz şi Hume, şi a propus trichotomia: propoziții analitice, propoziții sintetice şi propoziții sintetice a priori. Acestea din urmă au rol constitutiv fundamental, deoarece sunt condiții necesare ale posibilității experienței obiective. Propozițiile sintetice sunt divizate în două clase: propoziții intuitive şi propoziții discursive; primele sunt intim legate de structura percepției, în timp ce ultimele sunt legate de funcția de ordonare a noțiunilor generale.

Propozițiile sintetice intuitive au o relevanță remarcabilă pentru filosofia kantiană a geometriei şi a aritmeticii. Ele sunt posibile, spune Körner [1, p. 37], deoarece: a) descriind spațiul şi timpul, noi descriem particularul şi astfel, producem propoziții sintetice; b) descriind spațiul şi timpul, noi nu descriem percepții senzoriale (impresiile), descripțiile noastre sunt independente de percepții senzoriale, adică ele sunt propoziții a priori care descriu ceva care este imuabil.

Aceste aserțiuni vizează în special matematica pură, care nu este o cunoaştere analitică, ci o cunoaştere sintetică a priori, deoarece poartă asupra spațiului şi timpului.

Influența kantiană asupra adepților filosofiei criticiste se explică prin rolul şi statutul propozițiilor matematice ca descripții ale spațiului şi timpului. Kant a sugerat suficient de explicit că întreaga descriere a structurii spațiului şi timpului cere nu numai o contemplare pasivă, ci şi o construcție. Körner [1, p. 38] scrie referitor la acest aspect: „A construi un concept înseamnă mai mult decât a propune şi consemna definiția sa; înseamnă a-l dota cu un obiect *a priori*. Ce vrea să spună Kant prin aceasta e foarte dificil de înțeles, dar deloc obscur sau confuz. Este foarte clar ce decurge şi ce nu, din construirea unui concept. Nu înseamnă să *postulezi* obiecte pentru el".

Elementul *a priori* este un ingredient esențial al construcției. Posibilitatea construcției fizice se bazează pe posibilitatea construcției a priori, e.g., consemnează Körner [1], construcția sferei metalice este bazată pe posibilitatea unei sfere în spațiu, așa cum imposibilitatea construcției fizice a unei sfere cu 15 dimensiuni este bazată pe imposibilitatea construcției a priori corespunzătoare. Cunoașterea umană a unui obiect este produsă prin combinarea senzațiilor care apar din prezența obiectului într-o prezentare coerentă a obiectului însuși, o idee cu relevanță deosebită pentru cunoașterea geometrică, ce este imtim conectată cu intuiția spațiului. Combinația senzațiilor este guvernată de o „lege inerentă a minții umane", a cărei manifestare este spațiul, intuiția pură, a priori. Perspectiva transcendentală este introdusă în această manieră, deoarece „spațiul nu este ceva obiectiv și real, nici o substanță, nici un atribut, nici o relație, ci o schemă subiectivă și ideală pentru coordonarea oricărui lucru care este extern simțit în orice mod, care apare din natura minții conform unei legi stabile". Dacă această aserțiune este adevărată, urmează că obiecte externe sensibile sunt spațiale când sunt prezentate în intuiția sensibilă; proprietăți și relații spațiale nu există în ele însele, independent de prezentarea lor în gândire, mintea umană. Deci, Kant a susținut *prioritate ontologică a spațiului* în raport cu *corpurile*, dar nu a acceptat o reală autoființare a spațiului infinit vid ca Newton.

Ideea de spațiu universal nu este un *concept general*, ci o intuiție și anume, o *intuiție pură*, deoarece nu depinde de senzațiile coordonate în spațiu. Această idee ne-conceptuală, adică reprezentare singulară, care subordonează spații particulare ca părți, nu este complet acoperită de concepte, deoarece relațiile spațiale pot fi simțite și nu pot fi gândite; această idee ne-conceptuală este prezentă în axiomele geometriei și în orice construcție mentală a postulatelor și problemelor geometrice. Kant [4] scrie: „Că spațiul are numai trei dimensiuni, că există însă o linie dreaptă care unește două puncte date, că un cerc poarte fi tras pe un plan dintr-un punct dat cu orice rază dată etc., aceste fapte nu pot fi inferate dintr-o noțiune universală de spațiu, ci pot fi numai percepute concret în spațiul însuși".

Torretti [1] spune că este greu să înțelegem ce pot vedea ochii, chiar „*ochii minții*" în intuiția pură, liberă de senzații, până ce aceasta nu este determinată prin concepte.

Concepția lui Kant despre cunoaşterea geometrică a fost foarte influentă; Hintikka [3] a încercat recent să facă o analogie între apelul lui Kant la „intuiția singulară" şi uzul instanțierii existențiale, care este indispensabilă în majoritatea demonstrațiilor matematice.

Caracteristica propozițiilor geometrice este că sunt logic adecvate şi pot fi negate fără teama contradicției. Kant (*apud.* Torretti [1]) spune: „cel ce exersează să născocească în mintea lui orice relații diferite de acelea prescrise de spațiul însuşi, lucrează în van pentru că el este constrâns să întrebuințeze această idee adevărată în spațiul ficțiunii sale". Kant a asumat că relațiile prescrise de spațiul însuşi sunt acelea enunțate în „*Elementele*" lui Euclid şi el a pretins că noua sa teorie a spațiului garantează şi explică validitatea obiectivă a geometriei euclidiene. i.e., o ştiință care este adevărată despre orice obiect fizic. Kant (*apud.* Torretti [1]) scrie: „Nimic totuşi nu poate fi dat simțurilor dacă nu este în acord cu axiomele primitive ale spațiului şi consecințele lor conform prescripțiilor geometriei, chiar deşi principiul lor este pur subiectiv. Deci, orice care este astfel dat va fi, dacă este self-consistent, în mod necesar consistent cu ultimul şi legile sensibilității vor fi legile naturii în măsura în care ea poate fi percepută prin simțuri (quatenus in sensus cadere potest). Deci, natura se conformează exact (ad amussim) preceptelor geometriei privind toate proprietățile spațiului demonstrate în această ştiință, nu pe forța unei presupoziții născocite, ci a uneia care este intuitiv dată, ca o condiție subiectivă a tuturor fenomenelor, pe care natura le poate manifesta simțurilor".

R. Torretti [1] crede că pentru a încorpora această doctrină în filosofia critică a lui Kant sunt necesare următoarele ajustări:

i) mai întâi, schema metafizică din 1770 nu mai poate fi susținută, deoarece cunoaşterea umană era restricționată la obiectele simțurilor (sensibilității), aşa cum ele ne apar în spațiu şi timp; în afara acestui context, nici o proprietate sau relație nu poate fi predicată cognitiv despre

ceva şi deci, spaţiul nu poate fi considerat ca un atribut al unei substanţe, gândirea (mintea) modificare coordonatoare a acestei substanţe. Conform cu Kant [3], filosofia spaţiului şi timpului trebuie fundată pe o analiză a experienţei umane şi pe presupoziţiile ei ca relevate din interior. Din această analiză trebuie să presupunem percepţia obiectelor în spaţiu, deci, spaţiul nu depinde de psihicul uman prin manifestarea lui fenomenală. Spaţiul obiectiv este zis încă subiectiv din cauza caracteristicilor „*egotistice*" ale procesului prin care spaţiul însuşi devine evident, manifest.

ii) a doua, este în special relevantă pentru geometrie, deoarece orice conexiune, orice ordonare a diversului datelor senzoriale este lucrarea intelectului (raţiunii) şi trebuie coordonată prin concepte. O mutaţie foarte importantă este evidentă şi relevantă pentru perspectiva transcendentală: tranziţia de la spaţiul intuitiv preconceptual descris ca „ceea ce creează diversul aparenţei să fie intuit ca ordonat în anumite relaţii" la maniera „care face posibil ca diversul aparenţei să fie ordonat în anumite relaţii". Kant [2] trage concluzia că forma intuiţiei externe prin ea însăşi nu posedă structura descrisă de propoziţiile geometriei deoarece, spune el, „spaţiul prezentat ca obiect (cum cerem actual în geometrie) conţine mai mult decât simpla formă de intuiţie".

Rolul intelectului este considerat acum înalt relevant pentru statutul spaţiului, deoarece asigură unitatea obiectelor. Kant [1, §38] scrie:

„Aici este, aşadar, natură, care se întemeiază pe legi, pe care *intelectul* le cunoaşte *a priori*, şi anume, mai ales prin mijlocirea principiilor universale ale determinării spaţiului. Mă întreb atunci: aceste legi ale naturii se află oare în spaţiu, iar intelectul le descoperă căutând doar să cerceteze înţelesul bogat ce se află în acesta, sau se găsesc ele în intelect şi în felul acesta determină spaţiul după condiţiile sintetice spre care tind toate conceptele sale? Spaţiul este ceva atât de uniform şi ceva atât de nedeterminat în ceea ce priveşte proprietăţile particulare, încât nimeni nu va căuta în el o comoară de legi ale naturii. Intelectul este, în schimb, cel care determină spaţiul să se configureze în cerc, în con şi în sferă, în măsura în care el conţine temeiul unităţii construcţiei acelor

figuri. Simpla formă universală a intuiției care se cheamă spațiu este, prin urmare, într-adevăr substratul tuturor intuițiilor care pot fi determinate în toate obiectele particulare şi tot în spațiu se află şi condiția posibilității şi diversității intuițiilor, dar unitatea obiectelor nu este totuşi dată decât prin *intelect*, şi anume, după condiții care se află în propria sa natură. Şi astfel, intelectul este originea ordinii universale a naturii pentru că subsumează toate fenomenele propriilor sale legi, producând abia în felul acesta *apriori* experiență...".

Intuiția apriori a multiplului, diversului (manifold) numită *spațiu* este concepută *nu ca o simplă mulțime de puncte* (point set), ci ca un *continuum*, de presupus *tridimensional*. „Simpla formă a intuiției" constrânge intelectul să acorde o structură topologică definită unui obiect al geometriei, pe care intelectul o poate determina în mod liber în conformitate cu legile naturii. Deoarece propozițiile geometriei clasice nu sunt logic necesare, nimic nu poate evita posibilitatea intelectului de a dezvolta o varietate de geometrii alternative (compatibile cu topologia prescrisă) şi folosirea lor în fizică. Această concluzie este implicată de scrierile kantiene anterioare, însă este evidentă dacă noi suntem familiarizați cu multiplicitatea sistemelor geometrice şi acest fapt înainte şi nu după ce citim pe Kant. Atitudinea ortodoxă kantiană este pregnantă în discuțiile filosofice despre geometriile ne-euclidiene. Oponenții geometriilor ne-euclidiene le tratează sumar, dacă nu superficial, considerându-le exerciții intelectuale interesante, ce nu privesc ştiința autentică a spațiului, relevată numai prin intuiția pură şi în deplin acord cu „*Elementele*" lui Euclid, sau cel puțin cu spiritul acestora.

R. Torretti, ale cărui gânduri şi reflecții asupra operei lui Kant le-am expus anterior, consideră că geometriile ne-euclidiene n-au infirmat concepția lui Kant, în special fanteziile de tinerețe din 1746 ale filosofului german. Într-adevăr, însuşi Lobacewski, unul dintre întemeietorii acestui tip de geometrie, scria „că forțe şi numai forțe, singurele generează orice: mişcare, viteză, timp, masă chiar distanțe şi unghiuri". R. Torretti [1, p. 33] consemnează în acest context: „Dacă Kant are dreptate că forțe(le) determină geometria fizică, atunci aceeaşi geometrie nu este pretutindeni

aplicabilă, deoarece geometria trebuie să reflecte comportamentul forțelor care acționează la fiecare nivel al realității".

Dar, indeterminarea este inerentă în conceptul de intuiție a priori a spațiului euclidian, ceea ce este cauzat de imposibilitatea vizualizării întregului spațiu. Filosofii, de la Platon la Kant, nu au contribuit în mod esențial la *fundamentele geometriei*, mulțumindu-se să discute despre *natura* obiectelor geometrice şi *sursa* cunoaşterii geometrice, în rest acceptând principiile lui Euclid. Numai incidental vom găsi tentative ale filosofilor care vizează justificarea unui principiu particular al geometriei, sau relațiile principiilor cu corpul propozițiilor geometrice. Singurul filosof care s-a implicat în *partea de fundamente ale geometriei* este Hegel care a afirmat că dacă se admite că axiomele matematice nu sunt simple tautologii, atunci ele ar trebui demonstrate la nivelul unei ştiințe filosofice; în consecință, Hegel a arătat că încercarea lui Euclid de a demonstra postulatul 5 nu este justificată, deoarece enunțul lui conține conceptul de „linii paralele" care reclamă în mod esențial o investigație filosofică, dar filosoful german nu a întreprins o asemenea analiză.

4.6. FILOSOFIA POSTKANTIANĂ A GEOMETRIEI: HELMHOLTZ, HILBERT, UEBERWEG, ERDMANN, RUSSELL, POINCARÉ

Helmholtz [1] a interpretat descoperirile lui Bolyai, Lobacewski, Gauss, Riemann şi propria sa descoperire ca o bază ştiințifică pentru o *filosofie empiristă a matematicii*, opusă apriorismului kantian. Conform acestei filosofii empiriste a matematicii, el formulează ideea unei *fundări factuale a geometriei.* Dar, concepția lui Helmholtz nu este aşa diferită de cea a lui Kant, observa R. Torretti [1], deoarece în realitate el «*a pavat drumul*» spre un sort special de *apriorism*. Pe scurt, teza empiristă despre geometrie drept cunoaştere a structurii spațiale, afirma Helmholtz, conține un set ordonat de adevăruri inferate logic din câteva principii (axiome) ce se referă la lumea materială, datorită experienței noastre,

concepută ca un proces de manipulare, observare, comparare şi inferenţă. Este probabil ca existenţa sistemelor consistente alternative de axiome geometrice să-l fi influenţat în direcţia formulării tezei empiriste despre natura şi structura geometriei; şi un element relevant al construirii acestei concepţii a fost, desigur, propria sa descoperire după care existenţa corpurilor rigide, „un fapt de observaţie", determină structura spaţiului.

Concepţia lui Helmholtz se constituie prin raportare permanentă la concepţia kantiană. Astfel, Helmholtz a crezut că, remarcă Torretti [1], pretenţia lui Kant, conform căreia cunoaşterea geometrică este neempirică, se bazează pe un fapt, pretins, al acordului nostru cu geometria lui Euclid; este invocată vizualizarea, ca gen de reprezentare imaginativă a figurilor spaţiale, ce o avem în timp ce încercăm să rezolvăm o problemă de geometrie elementară „cu ochii închişi". Pretenţia lui Kant nu ar fi susţinută deoarece: a) stabilirea inevitabilităţii axiomelor lui Euclid reclamă faptul ca vizualizarea interioară să fie perfect exactă, ori imaginilor noastre ale obiectelor geometrice, în primul rând, acelea referitoare la proprietăţile metrice, le lipseşte precizia necesară; b) noi suntem capabili să vizualizăm starea de lucruri într-un spaţiu neeuclidian.

Nu urmează din faptul că axiomele geometrice nu pot fi cunoscute a priori, că noi nu avem o cunoştinţă neempirică intuitivă a spaţiului, iar teoria kantiană a formelor de intuiţie date a priori este expresia unei asemenea situaţii. Referinţa helmoltziană la o *intuiţie transcendentală* pare surprinzătoare din perspectivă empiristă, dar benefică în plan epistemologic, deoarece anticipează o concepţie actuală, conform căreia conceptele şi teoriile ştiinţifice sunt creaţii libere ale minţii umane, ce nu-şi au originea în experienţă, însă care trebuie să fie testate de aceasta. Helmholtz nu poate evita perspectiva transcendentală în sens kantian, dar distincţiile ce-l separă de Kant se impun. Într-adevăr, Helmholtz introduce conceptul de *corp rigid*, constitutiv experienţei fizice, ca un *concept transcendental*, dar spre deosebire de categoria kantiană, proces pur mental de organizare a datelor senzoriale, aici rolul acestei noţiuni vizează reglarea folosirii instrumentelor materiale de măsurare.

Helmholtz observă faptul că *geometria fizică* comportă indeterminare, dar că adăugând la axiomele geometriei propoziții relevante privind proprietăți mecanice ale corpurilor naturale, ca principiul inerției, de exemplu, şi altele, constatăm fie confirmarea, fie respingerea ei de experiență. Acesta ar fi în interpretarea lui R. Torretti un argument foarte puternic împotriva filosofiei kantiene a geometriei şi poate rațiunea principală de ce aceasta nu poate supraviețui descoperirii *fenomenului geometriilor neeuclidiene*, deoarece o cunoaştere a priori a spațiului fizic, fără conținuturi fizice, nu poate să-i determine structura lui metrică cu exactitatea pe care o pretind aplicațiile fizice.

Hilbert şi-a constituit concepția asupra naturii geometriei, de asemenea, prin raportare la concepția lui Kant. După cum se ştie, el citează cu un gen de venerație pentru Kant, celebra frază a acestuia din „*Critica rațiunii pure*": „Toată cunoaşterea umană începe cu intuiții, procedează prin concepte şi sfârşeşte cu idei".

Dar, ideile lui Hilbert diverg în mod neaşteptat de concepția kantiană care este invocată prin sloganul mai sus citat, mai curând, ca un pretext pentru a-şi expune propriul său punct de vedere. Într-adevăr, după enunțarea listei de axiome ale geometriei, Hilbert consideră că activitatea meritorie şi relevantă *meta-matematic* este „*analiza logică a intuiției noastre spațiale*", un act destul de *anti-kantian,* dacă scrutăm problema în spiritul filosofiei lui Kant. Demersul hilbertian procedează de la intuiția spațială la cea logică, sau mai precis la o analiză conceptuală a axiomelor geometriei, o activitate pe care Kant a considerat-o nerealizabilă. Concluzia lui Hilbert ar putea fi formulată în termenii: dacă intuiția spațială este reflectată numai în grupele I-III de axiome, ea nu este în întregime determinată şi nu poate fi manifestarea unui individual unic, definit, cum unele pasaje din Kant sugerează.

Aşadar, în ce sens Hilbert este un kantian în filosofia geometriei devine problematic în lumina unei interpretări mai puțin standard a acestui aspect. Referitor la Hilbert, Gödel [1] a scris următoarele, privind aspectul intuiției: „Ceea ce Hilbert înțelege prin «Anschaung» este în mod substanțial intuiția spațio-temporală a lui Kant, limitată,oricum, la

configurațiile unui număr finit de obiecte discrete". Diferența privind noțiunea gödeliană de intuiție (K. Gödel [1]) este aceasta: termenul «Anschaung" este tradus ca fiind o *intuiție concretă.* Poate fi vorba aici de un aspect intuiționistic în concepția lui Hilbert despre matematică? Da, dar s-a întâmplat ca în unele discuții recente asupra fundamentelor intuiționismului, când conceptul veritabil de intuiție – constând în aceea că semnificația unui enunț matematic este constituită de ceea ce va fi o demonstrație a lui – să fie omis (cf. Ch. Parsons [1, p. 166]).

Friederich Ueberweg [1] dezvoltă o *concepție empiristă,* asemenea celei a lui Mill, asupra naturii şi fundamentelor geometriei, şi în acest sens a susținut că trebuie propuse principii noi din care cele de până atunci să fie inferate; de fapt, să fie propuse fapte noi ca o *fundare* a geometriei, ceea ce în realitate a constituit o anticipare a axiomelor lui Helmholtz din 1866. R. Torretti [1] a distins două poziții ale lui F. Ueberweg referitoare la apriorism: una *conciliatorie* şi alta *polemică,* căci el accepta concepția kantiană după care geometria este o *știință apodictică,* dar nu vedea de ce acest lucru ar implica faptul că spațiul este cunoscut apriori. Mai exact, afirma că încercarea lui Kant de a arăta că *natura a priori* a spațiului asigura, conferea, validitatea principiilor geometriei, nu reuşea să le derive din această natură; Kant nu a demonstrat că nu poate exista o ştiință apodictică referitoare la un obiect empiric, Kant a admis dilema „*empiric sau a priori*", fiindu-i necunoscută alternativa „elaborării raționale a celor empiric date în acord cu norme logice, fără conținturi a priori de cunoaştere", notează F. Ueberwg [1, p. 314]. Distingând între *certitudine apodictică* şi *certitudine asertorică* sau *factuală*, prima aparținând sistemului geometriei, cea de-a doua diferitelor principii considerate izolat, Ueberweg reproşează lui Kant că nu a observat că teoremele derivate din principii le fortifică, le consolidează pe acestea din urmă; adică consecințele în acord cu experiența confirmă presupozițiile, le conferă o creştere a certitudinii, care devine absolută.

În Ueberweg [1, p. 268] expune un aspect esențial al concepției sale epistemologice foarte moderne, şi anume face afirmația că chiar

dacă cineva ar reuşi să deducă geometria din conceptul „*esența spațiului*", cu aceasta nu ar dovedi fundarea validității credințelor sale geometrice. El nu este preocupat să determine în ce rezidă certitudine principiilor indemonstrabile ale geometriei, ci mai curând el doreşte să aducă o contribuție la clarificarea relațiilor familiare dintre axiome, postulate şi conceptele fundamentale ale lui Euclid, încercând să le deducă dintr-o sursă comună identificată în analizarea conştientizării noastre senzoriale globale, în vederea obținerii conceptelor generale şi apoi idealizarea acestora din urmă, atribuindu-le o precizie absolută. În Ueberweg [1, p. 315] îşi exprima credința că dacă vom arăta că geometria poate fi construită pe această bază, atunci am pavat calea pentru „opinia corectă privind caracterul logic al axiomelor euclidiene şi pentru recunoaşterea geometriei ca o ştiință naturală".

B. Erdmann [1] a considerat că noua geometrie a spațiului construită de Riemann şi Helmholtz confirmă concepția empiristă a intuiției spațiale şi infirmă filosofia lui Kant despre spațiu şi geometrie. Noua teorie a spațiului oferă o definiție a spațiului de fapt în termenii axiomelor lui Helmholtz, şi Erdmann propune s-o numim un sort, ramură de „*empirism-apriorism*", a cărui esență rezidă în aceea că toate reprezentările noastre sunt, pe de o parte, complet diferite de constituirea şi relațiile lucrurilor, iar, pe de altă parte, le corespund în orice parte. În mod explicit, dar într-un cadru ontologic mai curând primitiv, cum observă R. Torretti [1], Erdmann [1, p. 92 şi urm.] scrie: „Toate intuițiile noastre ale lucrurilor şi relațiilor externe sunt produsul interacțiunii, ale cărei condiții depind parțial de constituirea lucrurilor, parțial de esența evenimentelor fizice. Noi suntem în totală ignoranță despre maniera în care are loc interacțiunea, dar noi putem deriva următoarele concluzii din faptul existenței acesteia. În primul rând constituirea oricărui element al intuiției noastre trebuie să depindă în parte de natura produselor care stimulează, în parte de modul în care aceşti stimuli sunt primiți (receptați) şi elaborați de activitatățile psihice. În consecință (...) întregul material al senzațiilor noastre este pur şi simplu un sistem de semne pentru lucruri, deoarece proprietățile pe care le atribuim ultimelor nu sunt nimic decât rezultatele interacțiunii, dintre care un termen, anume, constituirea

activităților noastre mentale, îl luăm admis (...). De asemenea, formele în care acel material al senzațiilor este ordonat - formele spațiale nu mai mult şi nu altfel decât intelectuale - pot numai să fie un sistem de semne pentru relații şi situații ale lucrurilor". Următoarele distincții sunt utile pentru a contura specificul acestui «*brand*» de empirism numit de Erdmann „*apriorism*". Astfel, teoria cunoaşterii afirmă că empirismul consideră că reprezentările noastre depind în întregime de lucruri, iar că raționalismul susține că reprezentările noastre sunt independende de lucruri. După R. Torretti [1] se mai pot distinge două varietăți ale empirismului: *empirismul senzualist*, conform căruia reprezentările se află într-un acord deplin cu lucrurile; şi *empirism formalist* care pretinde numai un acord parțial al reprezentărilor cu lucrurile şi anume cu aspectul relațiilor calitative. În ceea ce priveşte raționalismul, acest curent afirma că deşi reprezentările noastre nu sunt cauzate de lucrurile externe, sunt în acord cu acestea în virtutea a ceea ce s-a numit *armonie prestabilită*; ca o varietate a acestei concepții gnoseologice distingem *raționalismul formal*, conform căruia acordul amintit este numai parțial şi vizează aspectul fundamental că formele gândirii sunt identice cu formele existenței.

Plecînd de la specificul cunoaşterii geometrice - acela ce vizează proprietățile metrice ale reprezentării noastre de spațiu - Erdmann [1, p. 116] scrie: „rezultatele matematice ne forțează să concludem că reporezentarea noastră de spațiu trebuie să fie neambiguu condiționată de efectele lucrurilor actual experimentate asupra conştiinței noastre" (apud R. Torretti [1]). Ar urma să conchidem, remarcă R. Torretti, că o filosofie raționalistă (al cărei specific epistemologic l-am prezentat sumar în rândurile precedente) să fie incompatibilă cu rezultatele investigației ştiințifice în câmpul geometriei. Argumentele acestei poziții filosofice cu privire la cunoaşterea geometrică, extrase de R. Rorretti [1] şi comentate cu referire expresă la filosofia kantiană a geometriei, care, se pare, i-a fost sursa, sunt următoartele în sistematizarea oferită de autorul citat: i) posibilitatea varietăților (manifolds) „n"-dimensionale (n>3) arată că influența experienței, i.e. a lucrurilor care ne afectează din exterior, determină în mod actual reprezentarea noastră particulară de spațiu. Acest

punct de vedere exprimat în Erdmann [1, p. 146] i se pare nesemnificativ din punctul de vedere al filosofiei kantiene a geometriei, deoarece aserțiunea fundamentală a acesteia - natura *a priori* a intuiției noastre de spațiu este compatibilă cu existența logică a altor spații având o structură diferită; ii) Erdmann [1, 59, 91, 146] opinează că fundamentele geometriei implică concepte empirice, ca de exemplu, corp rigid, mişcare, un punct de vedere susținut, cum am văzut deja, şi de Helmholtz, dar se ştie că nu există corpuri perfect rigide, prin urmare un asemenea concept nu este extras din experiență; iii) reprezentarea de spațiu a fost generată independent de experiență, prin forța spontană a spiritului; dacă este numai forma intuitivă universală de receptivitate a lucrurilor externe, în sens kantian, atunci nu este posibil să formăm reprezentări intuitive ale altor varietăți tridimensionale cu proprietăți metrice diferite. Erdmann [1] afirmă că Helmholtz a tratat acest lucru. Deoarece suntem incapabili să imaginăm un spațiu cu mai mult de trei dimensiuni, prin inversarea argumentului, spune Torretti, se poate conclude că tridimensionalitatea nu este o caracteristică empirică a spațiului. În concluzie, geometria ar respinge raționalismul, psihofiziologia percepției respinge senzualismul, oamenii de ştiință împărtăşesc *formalismul empirist*, după care percepțiile senzuale rețin structura relațională a lucrurilor, mai ales când este concepută cantitativ şi care, de fapt, exprimă structura lucrurilor. În ceea ce-l priveşte pe Erdmann, el este nevoit, datorită respingerii senzualismului, să adopte un *apriorism empirist* în filosofia geometriei.

Filosofia geometriei, elaborată de Erdmann, a fost însă convingător explicitată de unii autori, între care R. Torretti [1]. Acest autor discută câteva aserțiuni tari ale nucleului acestei filosofii a geometriei. Astfel, o primă aserțiune periclitează întregul sistem al empirismului geometric, căci, spune Erdmann [1, p. 158] (apud R. Torretti), „noi nu putem recunoaşte acele iregularități (faptul că suprafețele şi corpurile actual percepute arată iregularități care sunt ignorate de geometria elementară), până ce nu avem un concept de regulă de la care ele diverg"; am putea spune că este aici stabilită o self-inconsistență internă a empirismului geometric. O altă aserțiune, a se vedea Erdmann [1, p. 159] (*apud*

R. Torretti), este aceasta: „idealitatea conceptelor de construcție nu exclude originea lor empirică", argumentul acestei teze fiind faptul că invocă, nu specificitatea sursei, ci omogenitatea elementelor spațiale de care ar depinde. Dar nici prin această aserțiune nu se obține o fortificare a poziției empiriste în filosofia geometriei, ci mai curând o subminare a ei. Geometria nu poate fi tratată ca o disciplină științifică empirică, aidoma celor care investighează calitatea, ci operează cu definiții, postulate, axiome, apelează la metode deductive, ceea ce conferă rezultatelor ei - teoremele - *o generalitate* și *necesitate* ca cele pretinse de principiile care o fondează. Demersul geometric nu constă într-o simplă analiză a intensiunii conceptelor ei, ci este o autentică știință sintetică, axiomele aplicându-se la noi concepte ale construcției geometrice. Erdmann este în favoarea raționalismului prin afirmația că geometria se dezvoltă independent de orice experiență particulară, deoarece „ea presupune că reprezentarea spațiului, ale cărui relații de construcție sunt studiate de ea, este la fel de validă pentru orice experiență" (Erdmann [1, p. 176]), un pasaj în *stil* și *conținut* prin excelență kantian. Ceea ce este surprinzător este că pe aceeași pagină Erdmann scrie în stil *riemannian*, remarcă Torretti [1]; într-adevăr,textul lui Erdmann [1, p. 170] este relevant pentru interpretarea dată de Torretti căci susține asemenea idei: „O investigație exactă a cazurilor limită ale relațiilor metrice poate releva o divergență de la constantă sau de la valoarea nulă a curburii. ...această reprezentare corectată de spațiu va deveni subiect specific al cercetării geometrice, până când noi suntem eventuali conduși prin progresul următor, în cazul acestui nou rezultat devine nesatisfăcător să facem o revizuire a proprietăților de congruență și suprafață plată".

Pentru *B. Russell, problema centrală* a filosofiei geometriei constă în a determina statutul acestei discipline științifice, adică dacă *cunoașterea geometrică este necesară, apodictică sau a priori*. O atenție specială el acordă conceptului de *a priori*, pe care îl consideră în sens kantian - cunoaștere a condițiilor cerute de orice experiență, sau un gen de experiență - și respinge accepția psihologică a termenului ca irelevantă

pentru o cunoaştere ce se vrea necesară; de aceea el va lua termenul de cunoaştere a priori într-un sens kantian veritabil, adică într-un sens logic, obiectiv transcendental. Intenția principală a preocupărilor sale de *filosofia geometriei* a fost să arate că geometria proiectivă şi geometria metrică generală a spațiilor „n"-dimensionale maximal simetrice au o natură a priori. În concepția lui Russell, spațiul fizic are trei dimensiuni, iar curbura lui, aproximativ egală cu zero, este un fapt contingent.

Aşadar, *programul russellian* în domeniul filosofiei geometriei a vizat stabilirea naturii a priori a geometriei şi, în acest scop gânditorul britanic şi-a propus: a) identificarea axiomelor din care prin intermediul deducției logice să poată fi derivată orice propoziție a geometriei; b) elaborarea unei deducții transcendentale a axiomelor, care, în fapt, în concepția sa sunt aserțiuni despre (sau ale) condiți(ilor) generale ale posibilității experienței, sau ale unui gen anumit de experiență.

El enunță două liste de câte trei axiome pentru geometria proiectivă (PG), respectiv pentru geometria metrică generală (GMG). Asumă un „*principiu al diferențierii*", conform căruia orice este experimentat este distins ca divers, principiu cerut de particularitatea remarcabilă a oricărui gen de experiență care angajează o conştientizare a „*diversității în unitate*". R. Torretti [1], invocând Russell [4, p. 136], care spune că „acest element, luat izolat, şi abstras din conținuturi pe care le diferențiază, noi îl putem numi o formă de externalitate", remarcă în context specificul celor două liste de axiome enunțate pentru PG, respectiv GMG, subliniind că prima listă enunță proprietăți comune oricrei forme de externalitate conceptibilă, pe când a doua, mai restrictivă, are de-a face numai cu condiții cerute de determinarea cantitativă a formei de externalitate. De aici particularitatea axiomelor pentru GMG, de a nu fi în mod necesar adevărate, despre orice experiență, căci au în componența lor numai determinarea cantitativă a experienței acreditată de măsurare, şi, în consecință, ele sunt mai curând demne de crezare ca o fundare a ştiinței naturale.

Compararea interpretării kantiene, privind „*expunerea transcendentală a noțiunii de spațiu*", cu cea russelliană privind deducția

axiomelor geometriei îl avantajează, după R. Torretti [1, p. 302–303], în mod clar pe gânditorul englez. Într-adevăr, Kant a pretins că reprezentarea noastră intuitivă, obişnuită a spațiului este independentă de experiență, deoarece reprezintă însăşi sursa geometriei euclidiene, despre al cărei statut împărtăşea credința că oferă o cunoaştere în mod necesar adevărată. Kant [2] nu s-a interogat asupra statului axiomelor euclidiene în virtutea credinței că noi nu putem explica de ce spațiul cu care operăm în experiența noastră are structura stabilită de Euclid şi, în consecință, el n-a procedat la o demonstrație că orice axiomă a „*Elementelor*" exprima o condiție necesară a oricărei experiențe conceptibile sau a oricărei experiențe cantitative conceptibile. *Argumentul* (demonstrația) *transcedental*(ă) *kantian*(ă) privind natura a priori a geometriei se confruntă cu dificultăți în relația cu dezvoltările din studiile fundaționale de geometrie, dacă avem în vedere că sunt azi disponibile şi curente sisteme consistente ale geometriei diferite de cel euclidian şi chiar de cele prezentate de Russell în PG şi GMG.

Aşadar, *necesitatea* unui sistem axiomatic al geometriei cere un argument transcendental pentru axiomele alese. Trebuie remarcat că eşecul tentativei lui Russell de a oferi o demonstrație pentru necesitatea axiomelor PG şi GMG, este astăzi apreciat ca o *discreditare a apriorismului* în domeniul filosofiei geometriei, conclude în final R. Torretti [1]. Se acceptă că numai teoria mulțimilor ar putea constitui o presupoziție a oricărei experiențe, dar opinia lui Russell [5] este că avem în acest caz de-a face cu o *aprioritate* în sens trivial, derivată din statutul acestei discipline matematice ca ramură a logicii; teza poate fi susținută numai dacă extindem logica dincolo de limitele ei tradiționale fixate.

Esența epistemologiei lui *Poincaré* o constituie *convenționalismul*, piesă centrală în simțul comun sănătos. În fond, acest convenționalism poate fi rezumat prin câteva aserțiuni de bază, care angajează dificultăți în dispute şi polemici pentru oponenții lui, tocmai pentru că aceştia cu greu nu pot fi de acord, în publicul prizat la simțul comun, cu tezele sale principale: ştiința are de-a face cu fapte crude şi relațiile lor care există independent de voința oamenilor de ştiință şi sunt cunoscute prin simțuri;

pentru a raționa despre aceste fapte şi relații dintre ele, în vederea stabilirii caracteristicilor şi conexiunilor lor comune, savanții recurg la convenții, trebuie să cadă de acord asupra unor convenții privind maniera de folosire a metodei de descriere; dar, multe dintre convenții sunt vechi şi din această cauză acordul este uneori dificil. O problemă este însă următoarea: la nivelul enunțurilor ştiinței este destul de dificil să tragi o linie de demarcație între elementele (aspectele) convenționale şi cele factuale.

Elementele convenționale în cunoaşterea umană i-au atras atenția încă lui Hobbes, în secolul al XVII-lea; problema a fosr reluată în secolul al XIX-lea legat de definirea şi identificarea sistemelor inerțiale în mecanică.

Convenționalismul filosofiei geometriei a lui Poincaré a fost studiat de Rougier (1920) şi de Max Black (1942). Max Black a observat, în interpretarea pe care el a propus-o, că doctrina convențională a gânditorului francez vizează distinct geometria *pură* (în ansamblul de teorii axiomatice formale) şi geometria *aplicată* (situația când una dintre aceste teorii formale a primit o interpretare fizică). *Convenționalismul geometric* susținut de Poincaré nu este cel în sensul tare al termenului, Poincaré susține un convenționalism în sensul slab al cuvântului, căci tot ceea ce el afirmă este teza *traductibilității* teoriilor axiomatice formale în teorii deductive contrare lor şi nu în orice teorii; referitor la caracterul convențional al geometriei aplicate, acesta decurge din convenționalitatea geometriei aplicate. Dar lui R. Torretti i se pare discutabilă teza caracterului convențional al geometriei pure şi reia în context punctul de vedere exprimat de Sklar [1, p. 45], conform căruia, deoarece propozițiile geometriei pure nu sunt nici adevărate nici false, ele nu pot fi convențional adevărate sau false. Poincaré, însă, a susținut că geometria este convențională deoarece ea nu este nici adevărată nici falsă, iar el n-a folosit expresia „*adevărat prin convenție*" pe care ar fi considerat-o lipsită de semnificație. Punctul de vedere al lui R. Torretti [1] este următorul: „o disciplină ştiințifică este convențională când enunțurile sunt adoptate sau respinse pe alte rațiuni decât adevărul sau falsul". În teoriile axiomatice, deci şi în geometria pură, se iau asemenea decizii?

Situația nu este deloc aceasta, deoarece aceste teorii coexistă având drepturi epistemice egale, iar o alegere, sau preferință, intervine numai pentru o investigare mai atentă a teoriei în cauză şi aceasta numai temporar. Numai dacă fiecare teorie axiomatică este traductibilă în oricare din contrarele ei, atunci geometria aplicată, matematica aplicată, sunt convenționale. Dacă o teorie T, ce descrie adecvat fenomenele unui domeniu, este traductibilă numai în unele dintre contrare, dar nu în toate, atunci situația este evident diferită şi nu mai putem susține că geometria aplicată, matematica aplicată, sunt convenționale. (Geometria plană euclidiană nu este traductibilă în geometria plană BL – Bolyai-Lobacewski – căci prima introduce termeni noi adăugați axiomelor, definițiilor la teoria laticelor).

Contraexemplele citate de R. Torretti [1] constituie o bază suficientă pentru respingerea versiunii interpretative a convenționalismului geometric propuse de M. Black [1]. În sinteză, reținem că deşi distincția dintre geometria *pură* şi geometria *aplicată* circula în epocă, în mod curios, Poincaré n-a folosit-o. Dar, ceea ce este mai esențial, abordarea lui Black extinde caracterul convențional al geometriei la scara întregii matematici aplicate, ceea ce ar angaja posibilitatea ca orice teorie în fizica matematică să fie înlocuită cu negația ei, cu condiția *salva veritate,* să reinterpretăm adecvat, convenabil, unii dintre termenii ei, considerații care nu sunt prezente în ansamblul doctrinei convenționaliste a savantului francez, care s-a mulțumit să afirme numai că ingredientul geometric al teoriilor fizice, relevant pentru descrierea caracteristicilor spațiale ale fenomenelor, nu este impus de experiență, ci poate fi ales liber de omul de ştiință. Poincaré face o distincție relevantă între aplicarea convenționalismului geometric pe care îl profesează: „*spațiul geometric*", de care depind caracteristicile spațiale (*dintre, direcție, continuitate, număr de dimensiuni, relația de conținere, contiguu, separat, interior, exterior* etc.) şi „*spațiul sensibil*", ansamblul caracteristicilor spațiale ale fenomenelor, aşa cum acestea apar simțurilor noastre, şi afirmă că teza convenționalistă se aplică numai primului gen de spațiu (geometric). Pentru ființe umane cu o altă educație intelectuală, geometrică,

decât cea euclidiană, va fi valabilă o altă geometrie în care acestea vor localiza fenomenele lumii externe - vor construi un spațiu neeuclidian, sau, poate, un spațiu cu patru dimensiuni şi, în consecință, vor conecta fenomenele într-un spațiu neeuclidian, a susținut în Poincaré [1].

Poincaré a susținut intersanjabilitatea a două geometrii diferite metric, însă în acord din punct de vedere topologic, şi, mai mult, nu a negat posibilitatea folosirii în fizică a geometriilor topologic neuzuale, afirmând explicit că proprietatea topologică – numărul de dimensiuni – este stipulată convențional, dar sugerată de experiență; Poincaré [2, p. 93] afirma că experiența ne arată că spațiul cu trei dimensiuni este mai comod. Iar în Poincaré [3, p. 157] el spune şi mai explicit că „lumea externă, experiența ne determină să alegem un model potențial cu trei dimensiuni".

Deoarece după Poincaré *apriorismul* şi *empirismul* sunt false, *convenționalismul* rămâne singura alternativă viabilă. El contestă natura a priori a geometriei, afirmând că dacă orice sistem geometric ar fi adevărat a priori, atunci nu ar fi de conceput un sistem contrar, la fel de rațional, adică un sistem care neagă, în mod consistent, un principiu al sistemului anterior; ori, experiența ştiințifică a infirmat acest lucru, sistemele de geometrie neeuclidiene raportate la cel euclidian fiind o probă concludentă. Dar critica apriorismului făcută de Poincaré i se pare lui Torretti insuficient (de) întemeiată, deoarece relevanța ei s-ar proba numai dacă s-ar menține în planul geometriei pure, unde *cunoaşterea a priori* a relațiilor de *consecință logică* dintre axiome şi teoreme, relativ la un sistem geometric, nu este incompatibilă cu cunoaşterea a priori a altor sisteme de geometrie pură. Demonstrația lui Poincaré respinge numai teza conform căreia structura geometrică actuală a lumii fizice, aşa cum aceasta a fost expusă în „*Elementele*" lui Euclid, este logic necesară. Şi deoarece în „*Critica rațiunii pure*" necesitatea geometriei nu este logică, absolută, ci contingentă, depinzând de constituția minții umane, se poate afirma că Poincaré nu l-a înțeles pe Kant atunci când formulează critica apriorismului geometric în termenii arătați. Într-un studiu din 1891 asupra geometriei neeuclidiene, inclus în Poincaré [1, p. 74], argumentul matematicianului

francez, este enunțat în propozițiile: „Sunt axiomele geometrice judecăți sintetice a priorice, cum a spus Kant? Ele se vor impune nouă cu o asemenea forță că noi nu vom putea concepe propoziția contrară sau să construim o teorie pe aceasta. There would not be non-euclidian geometry". Iar într-un alt studiu (1895), inclus de asemenea în „*Știință şi ipoteză*", argumentul lui Poincaré va viza mai direct şi mai specific concepția kantiană: „Dacă spațiul geometric este un cadru impus asupra fiecăreia dintre reprezentările noastre considerate individuale, va fi imposibil să reprezentăm o imagine demontată din acest cadru şi noi nu putem schimba nimic în geometria noastră" (Poincaré [1, p. 88]).

Adresa argumentării lui Poincaré este oricum greşită, vădind neînțelegerea doctrinei filosofice a lui Kant despre geometrie. Pentru filosoful german spațiul nu este conceput ca un cadru impus asupra fiecărei percepții senzoriale a noastră luată individual, ci asupra tuturor percepțiilor senzoriale considerate ca multiplicitate.

Dar în Poincaré [3, p. 157] avem expusă o concepție care asumă asemănător unui kantianism modificat, consonant cu spiritul original al acestei filosofii. Dacă Imm. Kant [6, vol. XVII, p. 639] scria că intuiția a priori a spațiului poate fi descrisă ca o conştiință (Bewusstsein) a unei aptitudini a noastre de a percepe lucrurile conform anumitor relații, Poincaré, în lucrarea citată, scrie expres următoarele: „Eu voi conclude că noi toți avem în noi intuiția continuului de un număr arbitrar de dimensiuni, deoarece noi avem facultatea construirii unui continuu fizic şi matematic. Această facultate precede orice experiență, deoarece fără ea aşa-numita experiență va fi imposibilă şi se va reduce la senzații crude, incapabile de a fi organizate în nici un mod; această intuiție nu este nimic decât conştiința acestei facultăți".

Se observă, deci, o evoluție a concepților epistemologice despre geometrie ale savantului francez, în sensul stabilirii unei strategii din ce în ce mai adecvate. El a negat că posedăm o *conştiință neempirică a spațiului* ca un *cadru universal* în care este localizată orice percepție senzorială, sau, în terminologie kantiană, că avem o *intuiție a priori a spațiului* ca o *formă a spațiului extern* şi a încercat să arate că spațiul şi

geometria se nasc dintr-o activitate intelectuală a comparării şi reflectării asupra percepţiilor senzoriale. Dar spre sfârşitul vieţii, notează R. Torretti [1], Poincaré a susţinut că există *intuiţie geometrică* identificată, de pildă, ca sursă a axiomelor de ordine ale lui D. Hilbert. Însă o asemenea intuiţie nu este nimic altceva decât facultatea de a construi un continuum n-dimensional şi decizia de a pune n = 3 ca şi definiţia metricii trebuie să urmeze experienţa. Pe de altă parte, combaterea *empirismului geometric* îl va conduce pe Poincaré la o *formă mai rafinată de empirism*, parcă anticipând evoluţia acestuia, ce avea să-l facă *dominant* în epistemologia secolului al XX-lea. Interpreţii operei epistemologice a lui Poincaré invocă cu precădere două aserţiuni relevante euristic dar şi semnificative pentru epistemologia geometriei lui. *Prima*: Geometria nu poate fi o ştiinţă empirică, deoarece ea nu poate constitui un subiect susceptibil de revizuire în lumina creşterii experienţei; *a doua*: Geometria este o ştiinţă exactă, în timp ce ştiinţele empirice sunt totdeauna aproximative. Prima aserţiune sugerează că Poincaré pare să fi avut în vedere geometria *pură*, dar, în fapt, el a discutat despre *fundamentele geometrice ale mecanicii*. A doua aserţiune este revelatoare pentru un anumit gen de înţelegere a teoriilor fizicii matematice, şi anume, Poincaré a crezut că acestea, în ciuda exactităţii lor matematice, pot fi comparate cu, coroborate şi respinse de fapte furnizate de observaţii şi experiemnte. De la această condiţie face excepţie geometria *aplicată* sau *fizică*, deoarece trebuie să medieze între teorii şi fapte, adică, mai precis, descripţia geometrică, geocronometrică oferă posibilitatea amintitei comparări a teoriilor cu faptele. Traducerea „*cărţii naturii*" se face cu ajutorul mai multor sisteme de geometrie, exigenţa care este formulată este că respectivele conţinuturi predictive ale teoriei fizice să rămână nealterate. Aceasta ar fi interpretarea pe care o propune R. Torretti, care crede că deşi nu a găsit dovezi directe şi relevante pentru ea în opera lui Poincaré, a considerat-o verosimilă în virtutea manierei, în care savantul francez a explicat noţiunea de „*spaţiu geometric*", care pentru acesta nu era decât *spaţiul mecanicii*. În lumina interpretării propusă de R. Torretti [1] devine inteligibilă credinţa că geometria *fizică* este exactă şi nu poate fi revizuită în lumina experienţei. Respingerea empirismului

de către Poincaré pare să rezide în raportul asimetric dintre *structura geometrică* a spațiului şi *informația empirică*, manevrabilitatea unor sisteme de geometrie fiind datorată, în primul rând structurii lor proprii, şi numai în al doilea rând, unor caracteristici ale materialului empiric asupra căruia poartă. În Poincaré [1, p. 101] el scrie textual: „Experimentele ne învață numai relațiile corpurilor; nici unul nu are relevanță asupra corpurilor cu spațiul sau asupra relațiilor mutuale, reciproce dintre diferitele părți ale spațiului". Legea relativității pe care el a formulat-o, verificată de experiență conform geometriei euclidiene, enunță că starea corpurilor şi distanțelor lor reciproce depinde de cea de la momentul inițial şi nu de relațiile lor cu spațiul absolut.

Legea relativității cere în aplicație considerarea universului ca un întreg. Dar, dacă sistemul nostru material este universul ca întreg, atunci experiența nu ne poate spune ceva relevant despre poziția lui absolută şi orientarea lui în spațiu. Instrumentele ne relevă numai starea părților universului şi a distanțelor reciproce dintre ele. În „*Știință şi ipoteză*" (p. 99) Poincaré formulează următorul enunț al legii relativității: „Lecturile (interpretările) pe care le putem face asupra instrumentelor noastre la un moment dat, vor depinde de lecturile pe care noi le-am putut face asupra aceloraşi instrumente la momentul inițial".

Acest enunț fiind independent de interpretarea geometrică a lecturilor, legea relativității nu ne poate autoriza să decidem între geometria euclidiană şi cea neeuclidiană.

Experiența nu ne poate învăța nimic despre relațiile materiale dintre diferitele părți ale spațiului, fapt adevărat şi despre spațiul absolut, aşa cum a fost conceput în mecanica clasică. Dacă fenomenele nu exprimă nimic decât relații mutuale dintre corpuri, atunci este dificil să înțelegi de ce descripția lor geometrică ar trebui relevată de experiență. Poincaré, notează Torretti [1], se pare că a ajuns la o concepție diferită despre spațiu, pe care însă, nu a reuşit să o clarifice. Dacă presupunem că înțelegem geometria *fizică* ca o structură matematică, a cărei mulțime fundamentală este alcătuită din corpuri materiale („particule", fenomene-evenimente), atunci experiența relevă relații mutuale dintre diferitele părți ale spațiului, iar enunțul lui Poincaré devine trivial fals.

CAPITOLUL V

SITUAȚIA ACTUALĂ ÎN FILOSOFIA MATEMATICII

5.1. FILOSOFIA GENERALĂ ŞI FILOSOFIA MATEMATICII: REALISM, NOMINALISM, CONCEPTUALISM

Orice dicționar filosofic respectabil (a se vedea şi „Dicționar filosofic" (EP. 1978)) consemnează în dreptul acestor termeni următoarele (aspecte) lucruri: *realismul*, curent specific filosofiei medievale (ca de altfel şi celelalte două – *nominalismul* şi chiar *conceptualismul*!) afirmă că „noțiunile generale, abstracte constituie *„realități"* de sine stătotoare, cu caracter spiritual, anterioare lucrurilor individuale, independente de acestea, ca şi de activitatea intelectului uman. Sintagma relevantă (arhicunoscută) pentru esența acestui curent filosofic este: *Universalia sunt realia*", adică universalele au *realitate,* idee care explică şi numele de realism. Realismul reprezintă linia de gândire platoniciană şi are ca reprezentanți de seamă pe Anselm de Canterbury, Guillaume de Champeux, Toma D'Aquino; *nominalismul* a fost susținut de adepții scolastici ai lui Aristotel şi a reprezentat punctul de vedere filosofic opus (în problema existenței universaliilor). Nominaliştii susțin că „numai lucrurile individuale au existență reală, generalul nu există nici separat, nici în lucruri, iar noțiunile generale (universale) (în latină *universalia)*

nu sunt decât simple cuvinte, nume ale lucrurilor". Expresia care rezumă esența nominalismului este „*universalia sunt nomina*", ceea ce ne explică și numele curentului. Dintre cei mai de seamă reprezentanți amintim pe Roscelin din Compiégne. Duns Scot și W. Occam.

În scolastica medievală s-a constituit și o a treia concepție-curent numită *conceptualism,* poziție filosofică inaugurată de Abelard și ai cărei reprezentanți au făcut tentativa de a (re)concilia nominalismul și realismul. Conceptualismul are în comun cu nominalismul negarea existenței generalului în lucrurile individuale, însă, în contrast cu acesta, admite că avem posibilitatea de a forma noțiuni generale, numite de adepții lui concepte și care ne oferă o cunoaştere autentică relevantă despre un număr chiar infinit de indivizi. Uneori termenul conceptualism este înlocuit cu cel de *constructivism,* dar nu în sensul special al termenului de *constructivism matematic,* care a cunoscut mai multe variante în filosofia contemporană a matematicii: *intuiționismul* (olandez) a lui Brouwer și Heyting, *finitismul* lui D. Hilbert și *constructivismul* lui A. A. Markov. *Constructivismul*, concepție despre natura matematicii, pune accent pe rolul *intuiției* și al *construcției* în matematică și formulează restricții în folosirea regulilor clasice de raționament și definiție, restricții care vizează în special *legea terțiului exclus* și *definițiile impredicative.* Dar, revenind la conceptualism, dictonul său specific este „*universalia post rem*", care explicit ne spune că universalul nu este în lucruri, ci după lucruri, adică în minte. Aşadar, universalele, după conceptualism, sunt invenții ale minții umane. S-a spus că dacă considerăm conceptualismul ca o „*teorie psihologică*", atunci programul său nu poate fi realizat, însă, *colapsul conceptualismului psihologic*", ca să folosim sintagma lui Stegmüller [1], nu înseamnă colapsul conceptualismului în general. Se are în vedere *comceptualismul constructiv,* (care are în Hao Wang pe unul dintre cei mai importanți reprezentanți), ce numai poate fi tratat ca o *poziție ontologică* intermediară, între *realism* (*platonism*, termenii sunt aproape intersubstituibili) și *nominalism*; cu o expresie plastică stegmüllerianã, acest conceptualism este o „*mlădiță*" a platonismului, care atunci când ne limităm la *platonismul extensional* i

se adaugă anumite exigențe de construcție, de exemplu, „*condițiile care definesc*"; urmează să se conformeze unor anumite *principii de construcție,* încât structura conceptualismului constructiv îmbină asumpții platoniciene cu asumpții constructiviste.

Adaptând problema la contextul matematicii, vom observa că *realismul, nominalismul, conceptualismul* se revendică drept *programe-direcții de reconstrucție a ontologiei matematicii,* analoagele marilor curente filosofice (cu același nume) din evul mediu constituite în *problema* universalilor. În reformulări adaptate la contextul *problemei existenței matematice* și în legătură cu redefinirea „*statutului ontologic*" al *obiectelor matematice* dar și reconstituirea unor *criterii adecvate* ale existenței în matematică, *realismul* este o filosofie a matematicii care consideră că obiectele matematice au o existență în sine complet autonomă, nelocalizabilă spațio-temporal și, evident, independentă de construcțiile umane, conceptuale și lingvistice; *conceptualismul* afirmă că entitățile matematice au statutul unor construcții mentale, sunt creații ale activității umane conceptuale, prin urmare sunt abstracții care nu au realitate ca atare; *nominalismul* este o *concepție metafizică* veche și care niciodată nu a avut o audiență populară, apreciată ca prea „*îngustă*" *ontologic,* încât s-a spus despre ea în această privință „că există mai mult în cer și pe pământ decât este visat în ontologia nominalistă", apud R. M. Martin [1]; prin urmare, este acreditată ideea că ontologia nominalistă nu este adecvată pentru matematica și știința teoretică. În realitate, se întâmplă ceva mai mult și anume se consideră că nominaliștii au eșuat în tentativa lor de a oferi o semantică adecvată pentru scopurile analizei filosofice. B. van Frassen remarcă în termeni drastici că nominalismul contemporan, pentru aceste motive arătate și altele, este văzut ca un eșec total. În viziunea nominalismului existența matematică este redusă la limbaj, la configurații finite de semne realizabile spațio-temporal și, în consecință, se neagă existența unor obiecte abstracte non-spațio-temporale.

Cititorul care se familiarizează cu literatura problemei în discuție poate fi derutat în planul terminologiei: pe de o parte, avem *realism,*

conceptualism, nominalism, pe de altă parte *logicism, formalism, intuiționism,* iar suficient de frecvent întâlnim şi termenii *platonism, constructivism.* Se consideră că primul triplet aparține filosofiei generale, în timp ce al doilea este semnificativ pentru filosofia matematricii. *Prima facie,* aşa pare să fie şi, mai mult, suntem tentați să-i urmăm pe acei autori care consideră că logicismul, intuiționismul şi formalismul ar reprezenta variantele moderne (în filosofia matematicii) corespunzătoare, în această ordine, realismului, conceptualismului şi nominalismului, concepții cu îndelugată tradiție în filosofia generală. Numai că la o scrutare atentă acestea din urmă sunt direcții de gândire construite prioritar în legătură cu problema *existenței universaliilor;* în timp ce logicismul, formalismul, intuiționismul, în calitatea lor de mari*programe fundaționiste*, conțin două aspecte importante: i) asumă o bază filosofică despre *natura matematicii,* în mod esențial fiind centrate pe *problema existenței* matematice şi, în această privință, ne apar ca „*specializări*", moduri specifice în câmpul filosofiei matematicii ale celor trei concepții: realismul, nominalismul şi conceptualismul; ii) al doilea aspect se referă la statutul de *programe metateoretice* ce îl au logicismul, formalismul şi intuiționismul, prin care ele exced „*substanța filosofică* „acoperită" de realism, nominalism, conceptualism. (Pentru detalii vezi şi M. Țurlea [1]). Dar dificultăți în „aliniere" apar din situația că uneori „substanța complexă" a unuia dintre marile programe fundaționiste nu poate fi explicată (acoperită) prin apel la varianta clasică corespunzătoare din filosofia generală. De exemplu, *formalismul* se revendică din nominalism, dar presupune şi concepții kantiene (a exista = a fi „on paper", intuiția fiind luată drept percepție în stil kantian) şi asumpții instrumentaliste, după cum dificultăți emerg din analiza logicismului (fragean) unde „*obiectivul nereal*" transcende viziunii platoniste, iar o explicație relevantă a intuiționismului angajează în discuție şi aspecte specifice kantianismului şi constructivismului, ultimul revenit şi el în contemporaneitate, în urma „colapsului" ce l-a marcat ca teorie psihologică a constructelor; revine ca ceea ce se numeşte *conceptualism constructiv,* vezi cel profesat de Hao Wang. În fine, mai derutează faptul

că în literatura de filosofia ştiinţei în general, a matematicii în special, sunt tot mai mult prezente studii şi cărţi consacrate realismului, platonismului, nominalismului, conceptualismului constructiv (vezi: N. Goodman [1]), Quine [2] [5] [6] [7], Henkin [2], Bernays P. [2], *On Platonism,* în Benacerraf P. and Putnam H. (eds) [2], R. M. Martin [1], H. Putnam [1], S. Barker [1], Hao Wang [1] etc.), unde de această dată acestea nu mai sunt tratate nici măcar numai ca o „*reconstrucţie raţională actuală*" a lor, ci ca perspective actuale, chiar recente, de abordare, să spunem, a limbajului matematic (L. Henkin [2]), a reconstrucţiei matematicii şi logicii şi altele (vezi aproape toţi autorii menţionaţi, la care adăugăm numele lui Stegmüller). Riscăm afirmaţia că s-a produs chiar o „tranziţie" de la aspectul fundaţionist (filosofic) la cel fundaţional (tehnico-metateoretic) şi chiar dacă în unele cazuri „ambiţiile" *reconstrucţioniste* s-au dovedit vane, este de remarcat că autori iluştri au lucrat în această direcţie şi este suficient să rostim numele lui B. Russell, Quine, Goodman, Henkin şi alţii. În ceea ce priveşte termenii *platonism* şi constructivism, cum se ştie, sunt de sorginte filosofică, primul, evident, desemnând concepţia filosofului grec Platon; cel de-al doilea, deşi are rădăcini în filosofie, însemnând o concepţie care susţine caracaterul activ şi creator al gândirii abstracte în cunoaştere (vezi kantianismul, neokantianismul şi hegelianismul), şi-a găsit autentica legitimitate pe terenul matematicii, aşa cum deja am schiţat; despre acesta din urmă observăm că circulă şi ca „*substantiv*": *constructivismul* matematic dar, mai recent, în scopul „revigorării" conceptualismului „epuizat", şi ca *adjectiv,* ca în sintagma lui Hao Wang; conceptualism *constructiv;* constructivismul în varianta finitistă hilbertiană şi cea intuiţionistă sacrifică drastic părţi ale ontologiei matematicii. Prestigiul direcţiei constructive, cu audienţă în anumite medii, a fost susţinut şi de adepţii nominalismului şi ai formalismului, după cum s-a încercat să se formuleze consideraţii nominaliste pornind de la realizări constructive şi formaliste. Ar rămâne în discuţie numai relaţia dintre „realism şi platonism". Cercetarea bibliografiei acestei probleme „*induce*", cel puţin, impresia că extensiunea termenului realism este mai vastă, el fiind folosit

la nivelul întregii ştiinţe teoretice, în timp ce numai „*realismul matematic*" ar fi suficient să acopere ceea ce referă *platonismul;* cu alte cuvinte, platonismul (ontologic, extensional, intensional) ar părea să aibe uzanţă şi legitimitate în sfera matematicii, mai corect în cea a filosofiei matematicii. Poate că lucrurile vor deveni mai clare pe parcursul derulării consideraţiilor noastre şi al acestor remarci preliminare care urmează imediat. Termenul „realism" este folosit în filosofia ştiinţei în mai multe accepţii. După P. Maddy [1] am putea sistematiza trei sensuri: i) primul, şi am zice cel mai originar (original!), este cel prezent în discuţiile referitoare la problema universalelor, unde are ca parteneri-rivali nominalismul şi conceptualismul; ii) al doilea sens, priveşte angajarea în discuţii asupra existenţei lumii exterioare şi în care rolul realismului contrastează cu cel al fenomenalismului, şi mai general, cu cel al idealismului; iii) cel de-al treilea sens al termenului este relevant în discuţii şi confruntări ce privesc statutul entităţilor teoretice având ca oponenţi operaţionalismul şi instrumentalismul. În cele ce urmează ne interesează primul şi al treilea sens al termenului, dar numai indirect, sau dacă vom înţelege prin realism, *realism matematic*, a cărui semnificaţie fiind după opinia noastră, acoperită, echivalată de platonism, şi deci intersubstituibilitatea acestor doi termeni fiind permisă noi vom întrebuinţa preponderent termenul *platonism (matematic)*.

5.2. PROBLEMA UNIVERSALILOR; PLATONISM ŞI NOMINALISM, ABORDARE LOGICO-LINGVISTICĂ ŞI EPISTEMOLOGICĂ

Problema universaliilor are o lungă tradiţie străbătută de dispute şi controverse ce au angajat cele mai diverse şi contradictorii poziţii filosofice: platonism, nominalism, conceptualism, ca şi variantele specifice ale acestora: logicism, formalism, constructivism, acesta din urmă inclusiv în forma sa „tare", ca intuiţionism. Această problemă se „despică" într-o „gamă" de suprobleme: există universalii? universaliile

există numai în mintea noastră? sau, în realitate? şi dacă au o existenţă independentă, universaliile există în şi prin lucruri particulare, sau au o existenţă separată? W. Stegmüller [1, p. 1] observă „că nici azi nu avem un răspuns satisfăcător dacă dincolo de lucrurile lumii reale trebuie să acceptăm obiecte de un fel în întregime diferite, de exemplu forme ideale, posibilităţi nerealizate şi valori". Adversarii cei mai intransigenţi ai acestei probleme sunt empiriştii, care o califică drept pseudo-problemă, considerând că nu există nici un temei pentru admiterea, acceptarea acestor entităţi – universalii – în general asimilate sortului de entităţi – ideile platoniciene, declarate, prin invocarea „briciului lui Occam", ca superflue. Dar procedeul renunţării la acest gen de obiecte contrastează flagrant cu legitimitatea unor forme ideale, obiecte, structuri ca mulţimi, clase, relaţii, numere, funcţii din câmpul matematicii. Dacă nominaliştii consideră confuză filosofic concepţia care presupune această referinţă la obiecte metafizice, discipolii lui Platon iau în serios problema obiectelor abstracte, susţinând o conexiune directă între problema universaliilor şi cea a expresiilor generale. Aceste expresii sunt în limbajul obişnuit substantive, verbe, adjective care intervin în formularea enunţurilor despre proprietăţi şi relaţii şi care într-un limbaj formalizat sunt desemnate prin simboluri ca de exemplu „P" sau „Q". Aceasta trimite în mod firesc la întrebarea, în legătură cu aceste cuvinte anterior menţionate, pentru ce fel de obiecte stau, ce denumesc ele? Răspunsul în legătură cu un asemenea predicat, ca, de exemplu, „verde" nu vizează în mod evident obiecte concrete, ci obiecte abstracte.

În timp ce platonismul operează cu o asemenea presupoziţie implicită, care acreditează ideea că predicatele sunt nume a ceva, nominalismul, respingând această teză, atribuie predicatelor generale numai un rol „*sincategorematic*", construindu-le ca propoziţii deschise, ca de exemplu „x este verde" unde „x" este o variabilă liberă. Concepţia nominalistă susţine că propoziţiile deschise nu au semnificaţie de sine stătătoare, dar achiziţionează semnificaţii, atunci când asupra lor se efectuează unele operaţii ca: înlocuirea variabilei cu numele unui obiect concret individual (în exemplul anterior punând „iarbă" în locul lui „x"

obținem „Iarba este verde"); legarea variabilelor prin aplicarea cuantificatorilor: (x) (cuantificator universal – citiți „pentru orice x") și (E(x) (cuantificator existențial care se citește „există un x"); aplicând aceste procedee obținem propoziții universale, respectiv existențiale: (x) (x este un om): orice lucru e un om" și care este, evident, o propoziție generală falsă; „(Ex) (x este un om): există un x și x este om, sau simplu, există oameni și care este o propoziție adevărată. Nominaliștii consideră propozițiile complete ca având semnificație, în timp ce conced că predicatele sunt numai fragmente de propoziții, ce au o semnificație numai în mod indirect, derivat. „Viciul" platonismului rezidă, conform poziției nominaliste, în faptul că atribuie predicatelor o semnificație proprie, indiferent de ipostaza lor ca fragmente propoziționale, cu alte cuvinte le consideră ca nume a ceva, în speță nume ale entităților abstracte. Nominalismul refuză să identifice a avea semnificație cu a fi nume a ceva, adică asimilarea semnificației complete cu funcția denumirii în contexte spațio-temporale 4-dimensionale. Presupoziția ontologică nominalistă este mai restrictivă, în sensul că dacă variabila legată (aflată, deci, în sfera de acțiune a unuia dintre cuantori – universal sau existențial) este considerată aici aspectul lingvistic relevant, atunci sunt admise numai variabile care parcurg exclusiv obiecte concrete. De îndată ce variabilele legate parcurg obiecte abstracte de genul clase, proprietăți, relații, numere, propoziții etc., depășim frontiera nominalismului și ne aflăm, cum spune Stegmüller [1, p. 3], pe teritoriul platonismului. Acest punct de vedere cu privire la relevanța ontologică a variabilelor legate ale unui sistem (formal) l-a enunțat explicit W. V. Quine prin celebrul său *slogan*: *„a fi înseamnă a fi valoare a unei variabile legate"*. Din punct de vedere ontologic variabilele ca entități abstracte (logice) au semnificație, iar nu forma lor lingvistică. Identificăm o conexiune directă între ontologie și adevăr, căci un obiect este presupus să existe, dacă este inclus printre valorile variabilelor și aserțiunile făcute devin adevărate.

Din punct de vedere logico-lingvistic, o comparație a sistemelor nominaliste și platoniste învederează, după Stegmüller [1, p. 5], următoarele două aspecte: a) nominalismul nu este un sistem complet

diferit de platonism, ci doar mai sărac; platonismul (mai exact sistemul acestuia) apare ca o „expansiune" a celui nominalist, deoarece admite şi variabile pentru obiectele abstracte; b) nu există situaţia intermediară, alternativa platonism-nominalism, formând o disjuncţie, un sistem (formal) putând fi platonist sau nominalist. Caracterizarea, oarecum vagă, a conceptului de *individual concret*, relevant pentru nominalism, introduce un gen de indeterminare referitor la nominalism, rămânând cert faptul că numai individualii concreţi sunt admişi ca valori ale variabilelor.

Logic şi lingvistic structura unui sistem formal în viziunea platonistă diferă de cea a unui sistem formal nominalist numai prin admiterea variabilelor, cu cuantificatorii asociaţi, care parcurg un domeniu de obiecte abstracte; aceasta ar fi diferenţa specifică, „expansiunea" atribuită unui sistem formal platonist relativ la unul nominalist, deoarece în rest urmează „partea comună" formată din următoarele grupe de ingredienţi: 1) variabilele individuale: „x" şi „y"; 2) expresii-predicat generale: „P". „Q"... monare sau poliadice şi care fac posibilă construcţia enunţurilor despre proprietăţi şi relaţii; remarcă: 1) şi 2) singularizează nominalismul prin invocarea exigenţei ca domeniile variabilelor, respectiv cele individuale şi pentru predicate să fie limitate exclusiv la individuali concreţi, proprietăţi şi relaţii concrete; 3) toate tipurile de constante logice cunoscute („nu", „şi", „sau", „dacă ... atunci" etc.) care permit formularea de compuşi propoziţionali verificaţionali; 4) cuantificatorii (x) şi (Ex) cu ajutorul cărora construim enunţuri generale şi existenţiale despre individualii domeniului (în limbajul nominalist) despre entităţile domeniului de discurs, care pot fi obiecte abstracte, precum clase, numere, proprietăţi, funcţii etc., în limbajul platonismului.

În discuţia despre natura şi structura sistemelor platoniste şi nominaliste, după Stegmüller [1, p. 5], sunt fundamentale următoarele aspecte: în primul rând, distincţia „*concret-abstract* care nu poate fi redusă la ceva mai primitiv, şi care poate fi înţeleasă prin apel la exemple; concrete sunt moleculele, celulele, stelele etc.; abstracte sunt clasele, mulţimile, numerele, relaţiile, funcţiile, propoziţiile etc. Nu este aşa importantă, cum s-ar credea, indeterminarea conceptului de individual

concret, căci se poate opera suficient de precis cu el, dacă admitem că aproape toate disciplinele ştiinţifice, am adăuga noi cele cu relevanţă factuală, empirică, pot fi expuse în manieră nominalistă. Astfel, acest domeniu de individuali constă pentru fizicianul teoretician în punctele spaţio-temporale ale universului, iar pentru biolog este reprezentat de totalitatea organismelor vii. Singurul lucru semnificativ şi cu adevărat important rămâne, apreciază Stegmüller, faptul dacă se poate transcende acestui domeniu de individuali, adică dacă sunt admise clase de individuali, şi, în consecinţă, în plan logic-formal se utilizează atunci un *stil bisortat"* de variabile: pentru individuali şi respectiv pentru clase. Dar se poate întâmpla ca discursul ştiinţific să fie cantonat sever şi exclusiv în regimul unui singur fel de variabile, cele pentru indivizi. Aşadar, subzistă o controversă serioasă, ştiinţifică (teoretică) şi valabilă, aceea în jurul problemei dacă dincolo de obiecte concrete există şi obiecte abstracte. Poziţia care consideră justificată legitimitatea acestui tip de obiecte, este vorba de cele abstracte, a fost numită *platonism* şi poate nu în sensul că susţinătorii ei pretind o *fidelitate exhaustivă* faţă de doctrina filosofică a gânditorului grec, ci doar în sensul că ei valorifică o contribuţie fundamentală a acestuia la cunoaşterea şi gândirea universală: descoperirea obiectelor abstracte. Corespunzător unei ierarhii ontologice a obiectelor abstracte (clase, proprietăţi, relaţii, funcţii, propoziţii etc.) identificăm o multitudine de forme ale platonismului asociate acestuia: platonism al claselor, platonism al proprietăţilor, platonism al relaţiilor, platonism al funcţiilor şi propoziţiilor, platonism al numerelor, platonism al mulţimilor, sistemele respective conţinând variabile pentru clase şi relaţii, sau variabile pentru numere şi funcţii acest lucru depinzând de bogăţia specifică a sistemului în cauză. Deoarece se ştie că numerele şi relaţiile sunt reductibile la clase, prin intermediul definiţiei, rezultă că variabilele care stau pentru numere şi relaţii devin superfluu şi deci pot fi suprimate în sistemul formal construit dintr-o asemenea perspectivă.

Au însă relevanţă în contextul discuţiei prezente două concepte (ca şi distincţia dintre ele): *extensiunea* (predicatului, predicatelor generale) care desemnează clasa obiectelor care satisfac predicatul

respectiv; intensiunea predicatului (adică proprietatea exprimată de acel predicat). În consecință, logicienii şi epistemologii disting două variante importante de platonism: *platonism extensional* şi *platonism intensional*, şi stabilesc următorul rezultat semnificativ ontologic, care ni se pare că l-a formulat prima dată Russell: numărul de obiecte ideale admise de platonismul extensional este mai mic decât numărul obiectelor ideale acceptate de platonismul intensional, întrucât totdeauna se pot specifica proprietăți diferite pentru orice clasă ce o determină, nu însă şi viceversa. Acest rezultat poate fi convingător ilustrat dacă considerăm un sistem, limbajul pentru propoziții, caz în care amintita diferență dintre cele două variante-tipuri de platonism este chiar mai frapantă, deoarece numărul extensiunilor va fi construit de cele două valori de adevăr, adevărul şi falsul, în timp ce numărul intensiunilor este chiar infinit, existând, într-adevăr, infinit de multe propoziții ce pot fi luate ca valori ale variabilelor propoziționale.

Platonismul extensional are o relevanță remarcabilă în filosofia matematicii, având conceptul de clasă drept pivot central întrucât, aşa cum s-a arătat în logica matematică modernă, extensiunile relațiilor, numerelor şi expresiilor funcționale pot fi reduse fără dificultate la conceptul de clasă. Deoarece nu s-a putut trasa o distincție fermă între conceptele de clasă şi întreg concret (complex, agregat, grămadă), ultimul fiind specific şi relevant pentru nominalism, s-a considerat că primul concept (cel de clasă) nu conduce inevitabil la platonism. Dar, în timp ce doi întregi sunt identici, două clase sunt diferite referitor la numărul elementelor lor şi prin urmare conceptele de clasă şi întreg concret trebuie distinse. Cu ajutorul conceptelor mai tehnice: termeni generali concreți (albastru, tată, uman etc.) termeni singulari concreți (umanitate etc.) putem aduce noi clarificări privind relația platonism-nominalism, căci aceşti termeni pot fi construiți ca nume ale extensiunilor sau ale intensiunilor. Într-un sistem nominalist termenii generali concreți construiți ca propoziții deschise, expresii ce slujesc, în acest context, unor scopuri de abreviere, iar propozițiile care vorbesc despre libertatea persoanei, curajul omului (termeni singulari concreți) au semnificație

numai traduse în expresii admisibile din punct de vedere nominalistic. Simpla prezență a acestor expresii nu conduce la platonism. Astfel, un enunț ca acesta: „Tinerii sunt atraşi de frumos", poate fi interpretat platonistic sau nominalistic în funcție de criteriul relevanței variabilelor legate, dacă acestea stau pentru obiecte abstracte sau, dimpotrivă, pentru obiecte concrete, în particular dacă frumosul, frumusețea, este acel ceva către care sunt atraşi tinerii sau această expresie poate fi reformulată în maniera nominalistă.

Teza platonismului despre existența obiectelor abstracte face ca această concepție să fie mai complexă sub raportul presupozițiilor şi limbajul la care apelează să fie mai bogat. „Traducerea platonistă" a enunțurilor nominaliste este la îndemână, căci un enunț ca „Pa" devine în limbajul platonismului „a ∈ P"; dacă în primul caz „P" avea un rol sincategorematic, în al doilea caz, în formularea platonistă, el devine numele unei clase. Stegmüller [1] remarcă o anumită „*asimetrie*" privind traducerea din contexte platoniste în contexte nominaliste. Platonismul poate accepta un context nominalist ca atare, sau poate converti expresia sincategorematică într-un termen singular concret. Nominalismul poate accepta un context platonist numai dacă acesta poate fi tradus într-un mod de vorbire nominalist; dacă reuşeşte acest lucru, atunci platonismul este considerat un mod de a vorbi („*façon de parler*") care serveşte abrevierii; dacă nu poate face acest lucru, el va respinge acel context ca fiind lipsit de semnificație. Incluziunea claselor oferă exemple care ilustrează aceste remarci. Quine a introdus universalii prin identificarea *indiscernabilelor*, căci asigură introducerea obiectelor abstracte ca valori ale variabilelor.

Aşadar, analiza decelează câteva probleme importante care îşi au relevanța lor, prin „*aplicare specifică*" în filosofia matematicii. Există anumiți factori lingvistici care ne relevă tipul de entități asumate? Răspunsul este afirmativ, dar în inferența de la *limbaj la ontologie* nu ne ajută nici numele, nici predicatele. Criteriul relevant, subliniază W. Stegmüller [1], care îl separă pe platonist de nominalist constă în ceea ce el admite ca valori ale *variabilelor legate* şi anume platonismul

va folosi variabile pentru obiecte abstracte de genul clase, numere, funcții și altele, iar, dimpotrivă, nominalismul nu va accepta în sistem asemenea variabile; raportul platonism-nominalism este descris de o disjuncție completă, conchide Stegmüller, și, mai mult, *sistemul platonist* este totdeauna „*mai bogat*" în baza motivului anterior. Nominalistul conchide, cum am mai spus deja, că orice poate fi spus într-un sistem platonist poate fi spus și într-un sistem nominalist, și deci platonismul este „taxat" drept un „*façon de parler*", contextele platoniste care nu satisfac această exigență nominalistă sunt respinse. Teza nominalistă în cauză comportă discuții, deoarece în practică numai un număr limitat de contexte platoniste au trecut „*testul traductibilității nominaliste*". O ultimă idee are un marcat caracter epistemologic și contestă definitiv orice conexiune între antitezele „*nominalism-platonism*" și „*cunoaștere particulară – cunoaștere generală*", „ținta metafizică" autentic-semnificativă urmărită de platoniști fiind formulată în întrebarea: existe obiecte non-concrete, adică abstracte? Paragraful următor este consacrat reconstrucțiilor de tip platonist și nominalist ale matematicii, prilej cu care tezele expuse în acest paragraf vor fi văzute concret „*la lucru*", unde inevitabil unele idei vor deveni mai clare, dar altele își vor păstra caracterul lor mai „obscur".

5.3. RECONSTRUCȚIILE PLATONISTĂ ȘI NOMINALISTĂ ALE MATEMATICII

Se afirmă că se poate realiza o *construcție nominalistă* a sintaxei sistemelor matematice formalizate, inclusiv a celor care au caracter platonist, știut fiind că ceea ce în mod obișnuit numim „semne", „cuvinte", „propoziții", „formule" nu sunt *obiecte concrete*, ceea ce ar fi dezirabil pentru nominaliști, ci „*forme*" platoniciene. În viziunea nominalistă obiecte concrete sunt „*apariții*" (occurences) *individuale* ale cuvintelor, propozițiilor (în sens lingvistic) ca fenomene localizate spațio-temporal. Platonismul extensional operează cu „*clase*" de astfel

de *„apariții"* (ale cuvintelor, propozițiilor etc.) care se află în relația de similaritate. În sintaxa formală (adică în metateorie) atunci când figurează semne, expresii, pentru platonist ele nu sunt obiecte concrete ci *abstracte. Construcția nominalistă* a sintaxei angajează „traducerea" nominalistă a enunțurilor despre semne şi expresii „platoniciene" într-un limbaj în care figurează numai *„inscripții concrete"*. În esență, ne aflăm în fața problemei interpretării nominaliste a limbajului matematic. *Analiza nominalistă* a *limbajului matematic,* comparativ cu tradiția nominalistă în filosofia generală, este de dată mai recentă şi după unii autori (de exemplu Henkin [2]), începe cu activitatea *şcolii de logică poloneză* legată de opera lui Lesniewski, T. Kotarbinski, Chwistek, Tarski. „Teoria reismului", (orice există este o persoană sau un obiect), asociată numelui lui Kotarbinski, ca şi eforturile, preocupările lui pentru stabilirea *consistenței matematicii,* printr-o interpretare în cadrul căreia toate aserțiunile acestei ştiințe sunt demonstrate ca fiind adevăruri fizice, sunt meritorii şi remarcabile în acest context. Dar ecoul activității acestei şcoli nu a trecut granițele poloneze, excepție fericită făcând doar scrisorile lui Russell, ca şi cele lui Tarski, după emigrare (1938) în S.U.A. După 1940 apare o serie de publicații în aria tematică a nominalismului, şi ne referim la lucrările lui Quine, Goodman, Martin, Woodger, Church, Wang, G. Bergmann, Lejewski, Scheffler şi L. Henkin. Aceste cercetări au fost conexe edificării unui *punct de vedere constructivist în fundamentele matematicii,* iar în context considerații nominaliste au fost formulate de pe poziții constructive şi formaliste.

L. Henkin [2], pornind de la lucrările lui Quine şi Goodman, încearcă să expliciteze *„substanța"* specifică unei reinterpretări nominaliste a limbajului matematic sub un dublu aspect: *în primul rând,* semnalăm intenția de a da o descriere a condițiilor sub care propozițiile matematice să fie afirmate *fără apel la entități abstracte* de orice fel; *în al doilea rând,* a evita orice asumpție, ca cea a *„finitudinii"*, sau a *„infinitudinii"* lucrurilor fizice, chestiunea nefiind definitiv cunoscută nu ar trebui să constituie baza semnificației limbajului. Şi Henkin scrutează atent prima dintre problemele lui Quine – Goodman [1] care a

fost aceea de a da o semnificație nominalistic acceptabilă propoziției „A este un strămoş al lui B", soluția propusă de aceşti autori constând într-un procedeu de „alterare" a formulării în termenii teoriei mulțimilor a acestui concept de „strămoş" (ancestor), prin înlocuirea relației de „*membru al unei mulțimi*" cu relația „*parte-întreg*", care este specific relevantă pentru obiectele fizice. Rezultatul acestui demers este construirea unei propoziții, enunț de forma „A este un strămoş al lui B" care semnifică: A şi B sunt persoane şi orice lucru care conține A ca o parte (astfel că toți copiii oricărei persoane care este o parte a ei sunt de asemenea părți ale ei) are B ca o parte. Analiza este validă în funcție de modul în care sunt concepute obiectele fizice ca răspândite spațio-temporal, astfel că cineva poate vorbi de obiectul care este „*suma* – în sensul teoriei despre parte-întreg – unui om şi stră-strănepot. Această formă a analizei, arată Quine, Goodman, nu este adecvată să explice conexiunea dintre o relație binară arbitrară – care are loc între obiecte fizice – şi relația ancestrală care este de acelaşi tip; eficacitatea analizei depinde de faptul că nici un strămoş (ascendent) al unei persoane nu poate avea o parte în comun cu persoana. Quine şi Goodman şi-au declinat competența privind soluționarea problemei mai generale.

Interpretarea propusă de Henkin a constat în formularea unei *liste de inscripții,* conform căreia propoziția „A este un strămoş al lui B" are următorul corespondent nominalist: prima inscripție este nume pentru A, iar ultima reprezintă un nume al lui B; mai concret, având x şi y ca inscripții succesive din lista formulată, atunci x denotă o persoană, iar y denotă unul dintre copiii săi. Ordinea naşterii se dovedeşte relevantă în interpretarea propusă, însă exigența poate fi slăbită şi să avem de-a face, în loc de o listă spațio-temporală cu o listă „*posibilă*" sau „*potențială*", un concept de *existența posibilă* figurând şi în lucrările lui Chwistek. Interpretarea propusă de Henkin se confruntă şi cu dificultatea generată de referință la conceptul semantic de *denotare*, al cărui uz, după cum este ştiut, generează paradoxuri. Remediul propus de Henkin constă în *limitarea* felului de nume ce pot apare în lista de inscripții, astfel încât să se opereze numai cu o *porțiune limitată* a „relației de denotare", ceea

ce va evita orice derivare a unui paradox. Henkin aminteşte că însuşi Quine a recunoscut, deşi nu suficient de explicit, că poate fi aprobat uzul conceptelor semantice în vederea acordării de semnificaţie enunţurilor matematice. Fie G o variabilă-predicat; Quine a considerat o interpretare a propoziţiilor de ordinul doi de forma „*pentru toţi G, A*", unde A este o inscripţie – din care propoziţii pot fi formate înlocuind G cu o inscripţie-predicat cum urmează şi anume: pentru orice predicat P, rezultatul înlocuirii lui G cu P în A este adevărat. El a respins interpretarea, dar nu a oferit o critică a acestei interpretări bazată pe conceptul semantic de *adevăr*. Pentru Henkin este evident că nu se poate exprima această interpretare în forma: pentru toţi G, A dacă şi numai dacă... unde spaţiul este umplut fără uzul termenilor semantici.

Interpretarea în termenii „*listelor de inscripţii*" oferă o explicaţie a *relaţiei ancestrale* pentru care cineva poate formula o listă de nume care „guvernează" de la orice individual la ceva, la oricare dintre strămoşii (ascendenţi); nu mai apare în nici un mod cerinţa că nici un individual nu are o parte comună cu un strămoş. Analiza lui Quine-Goodman vizează şi propoziţia: „Există mai mulţi câini decât pisici". Ei definesc un „*bit*" ca orice care are mărimea (size) celui mai mic dintre toate pisicile şi câinii şi apoi vorbesc despre un bit al lui x (x poate fi orice) ca o parte a lui x care este un „*bit*". Interpretarea Quine – Goodman pentru propoziţii: există mai mulţi câini decât pisici – este acum reformulată: Orice lucru care conţine un bit al fiecărui câine ca o parte a lui, este mai mare decât ceva care are un bit al fiecărei pisici ca o parte a ei.

Principala obiecţie adusă interpretării propuse ar fi că violează interdicţia împotriva atribuirii de semnificaţii bazate pe asumpţia *finitudinii* sau *infinitudinii* lucrurilor, ceea ce antrenează dificultăţi privind realizarea conceptului de „*bit*". Şi, în spiritul analizelor întreprinse de Quine şi Goodman, Leon Henkin arată că chiar dacă limităm analiza propoziţiilor la forma „există mai mulţi A decât B" la cazuri unde există *finit de mulţi* A şi B, aceşti autori nu fac o analiză concretă, în general, dacă unii A sunt părţi ale altora.

Interpretarea alternativă oferită de Henkin nu depinde nici de asumpţia finitudinii nici de cea a separării (disjointness): nu există lista

de inscripții care conține exact un nume al fiecărui A şi fiecărui B şi în care fiecare nume al unui A este urmat de un nume al lui B. Singura limită a aplicabilității acestei interpretări constă în posibilitatea că în anumite cazuri putem obține o listă completă a numelor.

Revenim la *limitarea* impusă de Quine şi Goodman; ei operează cu o lume cu finit de multe lucruri; însă inevitabil vor fi multe lucruri care n-au nume (multe lucruri vor fi folosite ca simboluri care nu sunt nume şi multe lucruri diferite sunt adesea nume ale aceluiaşi lucru). Construind lista de inscripții, inscripții asemenea au ca materiale anumite configurații, iar pentru absența obiectelor nu suntem în stare să folosim sau să găsim o listă despre ce putem concepe, chiar dacă toate obiectele listate au nume. Henkin afirmă că o listă o vizualizăm ca fiind compusă din obiecte care sunt aşezate pe un plan; iar în cazul listelor enorme ne confundăm cu dificultăți. În continuare, el expune cerințele formale pe care trebuie să le îndeplinească un sistem de inscripții prin care depăşeşte dificultățile enunțate. În contextul schițat concluzia finală a studiului lui Henkin este enunțată astfel: „În ciuda dificultăților evidente în furnizarea unei interpretări nominaliste pentru propoziții particulare ca cele discutate este dezirabil să investigăm ce posibilități există pentru un nominalist să ofere o interpretare sistematică pentru toate propozițiile unui limbaj matematic bine definit de un fel adecvat pentru majoritatea discursurilor matematice. Dacă, în fapt, există un sistem infinit de multe inscripții, atunci aceasta este într-adevăr posibilă, în timp ce dacă există numai finit de multe lucruri, atunci acest lucru este în mod cert imposibil, cum am schițat în altă parte" (Henkin [2]).

Să încercăm unele explicitări, dar şi unele clarificări suplimentare semnificative pentru *puterea de expresie* proprie *limbajului nominalist* în relație cu platonismul. De pildă, urmând expunerea lui Stegmüller [1], ne vom referi la predicatele *„strămoş al"* (ancestor of) şi *„părinte al"* (parent of) care pot fi introduse într-un limbaj nominalist ca expresii relaționale diadice şi anume astfel: „x este un strămoş al lui y" şi „x este un părinte al lui y". Scopul cercetării este o reducere a unui predicat la altul, în cazul nostru reducerea celui de-al doilea la primul. În concepția

lui Frege reducerea este posibilă, în acest sens se introduce conceptul de *clasă închisă* în raport cu o relație R, în virtutea căreia un obiect care stă în relația R cu un element din clasa respectivă, aparține el însuşi acelei clase (exemplu clasa numerelor pare este închisă cu privire la relația „jumătatea lui" (half of). Stegmüller ia ca exemplu: Beethowen aparține la infinit de multe clase, care sunt închise cu privire la „relația-părinte", cum ar fi clasa organismelor vii, cea a organismelor născute înainte de 1900 sau 1870, 1820; se pot forma clase mai restrânse, ca cele care exclud din clasa creaturilor vii pe eschimoşi etc. Caracteristica logică comună lui Beethowen şi strămoşilor săi față de restul Universului, şi care îl distinge, rezidă în faptul că ei constituie intersecția a tuturor infinit de multe clase care îl conțin pe Beethowen şi sunt închise cu privire la relația-părinte. Obținem rezultatul următor, şi anume, acum putem defini conceptul de strămoş (ascendent) în termenii conceptului de părinte (tata): „x este un strămoş al lui y" înseamnă „x aparține oricărei clase care conține y" şi este închisă cu privire la «relația părinte». Conceptele noastre de părinte (tată) şi strămoş au putut fi încorporate în limbajul unui sistem nominalist, dar, numai via „platonistic detour", vădind clar limitele puterii de expresie a nominalismului. S-a încercat depăşirea acestui defect al nominalismului, adică o fortificare a mijloacelor de expresie a nominalismului, prin modalitatea extinderii conceptului de lucru concret. Astfel, exigența ca şi componentele unui lucru să fie conectate spațio-temporal nu este obligatorie, nimic nu ne împiedică să credem că lucrurile sunt formate din „biți" distribuiți întâmplător în universul spațio-temporal; de exemplu, spune Stegmüller, toate lucrurile roşii care au existat cândva, existente în prezent, sau care vor exista în viitor ar putea fi considerate componente ale unui singur cel mai mare lucru roşu în universul spațio-temporal, iar cuvântul roşu ar putea fi întrebuințat ca *nume* al acestui *obiect concret.* Dacă acceptăm această interpretare, atunci ne modificăm atitudinea față de enunțul că *nominalismul nu poate construi predicate ca nume.* Până acum acceptam că predicatele când sunt construite ca nume, ele sunt nume ale *obiectelor abstracte,* care, după nominalism, nu există, însă prin *extinderea conceptului de lucru,*

putem acum să construim expresii-predicat ca nume ale anumitor lucruri cu 4 dimensiuni chiar în interiorul acestei concepții. Similar, se poate proceda şi în alte cazuri, atunci când operăm cu acest *nou statut*, de exemplu predicatul *vacă* nu mai desemnează o specie mamiferă, adică o *esență* (în terminologie platonociană) ci un *obiect real,* ale cărui componente sunt vacile individuale exact ca în ipoteza celulelor în cadrul organismului. Şi Stegmüller comentează acest *truc nominalist* că esența lui rezidă în înlocuirea *universalilor* prin *întregi concreți* adecvat aleşi, adică tehnic vorbind, în înlocuirea *relației platoniste de apartenență* (sau membru al unei clase) cu relația *parte-întreg*, compatibilă cu concepția nominalistă. „Detour-ul platonistic" poate fi acum ocolit înlocuind expresia „*este un element al*" cu expresia „*este o parte a*".

Avem acum contextul definirii propoziției „*x este un strămoş al lui y*" explicit cum urmează: (P): „x este un părinte al unui individual şi un individual este un părinte al lui y"; la aceasta adăugăm propoziția: „orice individual concret z care conține y ca o parte şi, de asemenea, care conține toți părinții părților lui z ca părți are, de asemenea, x ca o parte"; aceste propoziții luate în conjuncție alcătuiesc *definiensul propoziției* „x este un strămoş al lui y". În vederea reconclierii cu uzul obişnuit introducem şi adițional: „x nu este identic cu y", aşa cum am procedat în cazul definiției platoniste; inițial, variabila-clasă apărea legată, acum este destituită din acest statut, deturul platonist dovedindu-se evitabil. Procedura-Frege nu este aplicabilă în cazul definiției relației *ancestrale* în termenii *relației-părinte al,* ea este aplicabilă într-un mod mai general, remarcă Stegmüller [1, p. 36], ca o definiție a oricărei aşa numite relații diadice R, în particular în construcția matematicii, unde oferă definirea conceptului de *număr natural* în termenii conceptelor de *zero şi succesor* imediat, şi unde nu mai avem la dispoziție amintitul truc nominalist.

Eşecul în cazul general îşi are rădăcina în defectul ascuns în ceea ce este numit *conceptul extins nominalist de lucru*, convingător ilustrat pe un exemplu geometric dat de Quine: imaginăm un pătrat divizat de două linii perpendiculare în patru pătrate mici şi în care trasăm şi două

diagonale, rezultatul fiind un *univers de discurs* constând din toate domeniile convexe ale acestei figuri, în total 33. Dacă interesul nostru este orientat asupra figurilor geometrice şi nu asupra *formelor individuale concrete*, atunci avem de-a face cu 5 figuri: triunghi dreptunghic isoscel, pătrat, dreptunghi cu lungimi de latură 2 : 1; doi trapezoizi, reducţia de faţă fiind permisă şi asigurată de metoda identificării *indiscernabilelor*, aceste cinci obiecte sunt *universalii.* Este productivă şi fructuoasă *metoda nominalistă* în acest caz? Cum am văzut am avut succes în aplicarea ei la anumnite cazuri (vezi predicatele „roşu", „vacă") în intenţia noastră de a construi universalii ca lucruri concrete. Astfel identificăm „pătrat" cu toate cele cinci pătrate ale domeniului nostru luate ca un obiect; şi procedăm la fel cu celelalte figuri din universul de discurs. Consecinţa dezagreabilă a procedurii, observă Stegmüller, este următoarea: „toate cele 5 figuri trebuie făcute egale cu un domeniu şi atunci nu mai putem să le distingem una de alta. Cusurul în cauză este apreciat ca mai „recalcitrant" şi indezirabil decât unul ce emerge din *platonismul extensional,* atunci când pe acesta îl comparăm cu *platonismul intensional.* În locul exemplului geometric, urmând pe Stegmüller [1, p. 37, 38], luăm două predicate „P", „Q" având aceeaşi extensiune, unde P este predicatul „roşu", iar Q este predicatul „tare" şi facem ipoteza că lucrurile roşii sunt tari şi, *via* interpretarea nominalistă a celor două proprietăţi roşu ca cel mai mare lucru ce constă în toţi indidualii roşii, iar *tare* ca obiectul spaţio-temporal constând în toate lucrurile tari, vom obţine o *identificare*; dar, şi conform *platonismului extensional*, în virtutea ipotezei – clasa lucrurilor roşii este identică cu clasa lucrurilor tari, avem aceeaşi identificare. Să remarcăm că, în exemplul geometric dat de Quine, interpretarea nominalistă duce la o identificare, fapt contra-distinct de platonismul exentional care nu obţinea acest lucru. (Se întâmplă ca două domenii concrete să coincidă, dar clasa triunghiurilor şi clasa pătratelor, din care sunt formate, nu sunt identice). Acest eveniment al nominalismului se explică astfel: unul şi acelaşi *întreg* poate fi corelat cu *clase neidentice*, în timp ce întregul nu poate fi identificat cu agregate concrete care nu sunt identice unul cu altul. (Cf. Stegmüller [1, p. 38]).

Exemple: peretele (zidul) este alcătuit din cărămizi, pe de o parte, şi din molecule, pe de altă parte, fapt responsabil de eşecul *definiţiei nominaliste* a strămoşului (ancestor) pentru o relaţie arbitrară diadică. Aplicând *definiensul nominalist,* anterior expus, al conceptului *ancestral* la cazul oricărei relaţii R obţinem: „orice individual concret z care conţine y ca o parte şi care, de asemenea, conţine ca părţi toţi acei individuali care stau în relaţia R cu părţile lui z, are, de asemenea, x ca o parte", procedură care este ineficientă în cazuri când anumiţi individuali, care satisfac condiţiile predicatului R, deja au fost complet acoperiţi de ceilalţi individuali.

Prin fortificarea nominalismului se urmăreşte interpretarea nominalistă a formulărilor platoniste, un procedeu fiind cel al conceptului extins de *lucru*, dar nu se obţine totuşi un *succes deplin* în realizarea programului nominalist privind enunţuri ştiinţifice şi extraştiinţifice. Atitudinea nominalistă în faţa contextelor în care valorile variabilelor legate sunt entităţi abstracte este fie cea de a capitula în faţa platonismului, fie de a le declara ca lipsite de semnificaţie, lucru care se întâmplă când nominaliştii abandonează consideraţiile pragmatice în favoarea respectării unui *„principiu"*. *Fisura* nominalismului rezidă în ceea ce priveşte *distincţia în (de) conţinut*, în virtutea căreia putem distinge lucrurile, unul de altul. Întrucât două obiecte diferite nu posedă acelaşi *conţinut*, este imposibil să distingem o clasă de obiecte concrete – clasa satelor unei ţări de obiectul în cauză, aici ţara, şi nci de orice altă clasă care acoperă acelaşi întreg, de exemplu clasa tuturor hectarelor de pământ al unei ţări. Nu trebuie, cum s-a văzut, confundate conceptele de clasă şi întreg, desigur, discuţia având sens dacă este acceptat conceptul de clasă, lucru respins de nominalişti pe considerentul că nu se poate stabili o distincţie între o clasă şi un agregat. Maniera nominalistă ar fi un fel de argumentare a priori a incorectitudinii platonismului.

Între obiecţiile la adresa nominalismului se menţionează situaţia, frecventă, că în ştiinţă şi în viaţa de toate zilele suntem nevoiţi să apelăm la *formulări platoniste,* care „rezistă" traducerii într-un limbaj conform reţetei nominaliste; sacrificiul este prea mare, o serie de discipline fiind

excluse, între acestea fiind şi una foarte importantă – teorie mulțimilor. Antiteza nominalism-platonism, în cazul *demonstrației* în matematică, ar putea fi văzută în termenii următori, conchide Stegmüller: diferența rezidă în faptul că în cazul nominalismului reducem *presupozițiile ontologice,* iar în cazul platonismului *slăbim metodele de demonstrație.*

Nelson Goodman [2] [3] afirmă că exigența pe care trebuie s-o satisfacă un sistem nominalist este conformarea la principiul nominalismului, care presupune o *relație generatoare* şi noțiunea de *atom* relativ la această relație, descrisă astfel: „x este un atom dacă şi numai dacă nimic nu stă în relația de generare cu x"; uneori relația de generare comportă o anume complexitate în cazul unor sisteme, astfel fie „Gxy" care afirmă că x este un atom al sistemului relativ la relația generatoare G şi x poartă G la y.

Aşadar, un sistem este nominalist numai dacă satisface principiul nominalismului:

(1) $(y)(z)(x)(Axy \equiv Axz) \supset (y = z)$

Semnificația principiului nominalismului rezidă în faptul că în sistem nu există nici o distincție între entități fără distincție de conținut. După R. M. Martin [1], deşi Goodman vorbeşte de principiul nominalismului ca un criteriu după care sunt distinse sistemele, nu este suficient de clar ce înseamnă că un sistem „satisface" acest principiu. Principiul mai cere două noțiuni primare – *adevăr* şi *demonstrabilitate,* în context mai cere să nu avem de-a face cu propoziții indecidabile, adică adevărate dar nu demonstrabile, prin urmare însuşi principiul să fie demonstrabil. Principiul apelează la *relația generatoare ancestrală,* care conform „*Principiei Mathematica*" este acceptabilă pe baze nominaliste. Conexiunea dintre principiul nominalismului şi demonstrabilitate angajează unele dificultăți referitoare la statutul sistemelor nominaliste. Într-adevăr, dacă noțiunea de *ancestral* este intern intrinsecă oricărui sistem nominalist, trebuie ca principiul nominalismului să fie demonstrabil, atunci demonstrația lui apelează la resurse ce transcend cadrul nominalist.

Formula (1) poate fi înlocuită cu o schemă de genul următor:

(2) $(y)(z)((x)(\text{Atom } x \supset (Gxy) \equiv (Gxz)) \supset (y = z)$

G stă pentru sau relația G sau (G/G) sau ((G/G)/G) etc. Formulele de această formă au semnificație în sistem, indiferent dacă sistemul este sau nu acceptabil nominalistic.

Se consideră că sistemele violează *principiul nominalismului* dacă cel puțin una din negațiile formulelor de forma (2) este demonstrabilă. După cum se observă discuția despre demonstrabilitate constituie un aspect esențial în abordarea *principiului nominalismului*, mutând, plasând analiza criteriului de discernere a sistemelor nominaliste de cele nenominaliste în cadrul intern al sistemului în cauză, făcându-l, explicit, dependent de axiomele lui. N. Goodman [3] oferă axiome pentru ceea ce astăzi este numit „*calculul individualilor*" sau mereologie. R. M. Martin [1] remarca faptul că N. Goodman nu spune nimic despre axiome asumate în „guvernarea lui „$\in$". O formulă de forma negației schemei (2) angajează ingredienți în demonstrație care depăşesc principiile referitoare la „ancestralul propriu" E_{po} al lui $\in$.

Principiul nominalismului cere, cu privire la o relație care conduce la o relație generatoare, şi un principiu de compunere. „O condiție necesară, dar nu suficientă pentru relația de generare a sistemului este că dacă şi numai dacă x este un element non-atomar al sistemului va fi un element y care stă în acea relație cu x". Deci:

(3) $(x)\,(\sim \text{Atom } x \supset (Ey)_y PP_{po} x)$

generează un sistem cu relația care generează şi un alt principiu:

(4) $(x)(\sim \text{Atom } x \,.\, \sim x = \Lambda) \supset (Ey)(y\varepsilon_{po} x)$

R. M. Martin comentează [1]: „(3) este valabil pentru formularea Goodman a calculului individualilor, unde *atomii* sunt entități care nu au părți, iar (4) este semnificativ pentru teorii ale mulțimilor în care atomii sunt individuali sau elemente şi desemnează clasa vidă; PP şi ε sunt relații care pentru Goodman produc relațiile care generează PP_{po} şi ε_{po}; Goodman deşi vorbeşte de PP_{po} şi ε_{po} ca relații generatoare pe pagina 132 (Goodman [2]) dă o singură relație generatoare şi cinci elemente. G reprezintă o relație generatoare a unui sistem ca fiind relația care se constituie între două elemente x şi y ale sistemului dacă şi numai dacă x

şi y sunt conectaţi printr-un şir de perechi astfel încât primul element al fiecărei perechi este sau o parte proprie sau un membru al celui de-al doilea element. Această singură relaţie care generează este notată $(PP \dot{\sqsubset} \varepsilon)_{po}$ ancestralul sumei logice a relaţiei parte proprie şi relaţiei de membru (apartenenţă); relaţii generatoare, riguros vorbind, este numai $(PP \dot{\sqsubset} \varepsilon)$ şi $(PP \dot{\sqsubset} \varepsilon)_{po}$; dacă una sau cealaltă nu apare în sistem ca *primitiv* sau *prin definiţie*, este *prezummată relaţia diadică nulă* $\wedge$, caz în care sau $(PP \dot{\sqsubset} \wedge)_{po}$ sau $(\wedge \dot{\sqsubset} \varepsilon)_{po}$ devine relaţie generatoare. Concluzia analizei lui R. M. Martin [1] este că, oricum, enunţurile lui Goodman despre relaţiile generatoare nu sunt scutite de ambiguitate. Se mai poate face o altă alegere, de pildă $(PP \dot{\sqsubset} \varepsilon_{po})$ să fie o sub-relaţie a lui $(PP \dot{\sqsubset} \varepsilon)_{po}$.

Paginile 152, 156, 171 şi altele din Goodman [3] conţin formulări mai explicite ale *crezului* nominalist. Astfel citãm: „nominalismul admite ce poate fi făcut din individuali fundamentali selectaţi şi neagă că toate clasele pot fi făcute din ei”... „nominalismul pentru mine constă în mod specific în *refuzul de a recunoaşte clasele* (s.n. M. Ţurlea), adică nominalismul *poate admite orice ca un individual* (s.n. M. Ţurlea);... „Orice poate fi construit ca o clasă, poate într-adevăr să fie construit ca un individual (ca în formularea de ordinul întâi a unei teorii a mulţimilor) şi încă o clasă nu poate fi construită – nu toate din ele, adică, – ca un individual... Pe scurt, în timp ce nominalistul poate construi orice ca un individual el refuză a construi orice ca o clasă”. Tonul mai tolerant sub supoziţia restricţiilor severe este prezent doar în Goodman [3, p. 171]: „Cineva poate folosi semnul $\in$ şi să vorbească despre clase şi încă să aibe un sistem nominalist dacă restricţii severe asupra claselor au fost observate”, când se are în vedere, se poate presupune, ideea că există diferite moduri de formulare a unei *teorii a claselor*, care nu încalcă principiul nominalist. R. M. Martin [1] se întreabă dacă o teorie interesantă matematic ar putea fi formulată, respectând canoanele impuse de principiul nominalismului, o asemenea teorie putând fi aritmetica numerelor întregi, situată axiomatic în termenii postulatelor lui Peano, la care se adaugă ecuaţii adecvate pentru adunare (adiţie) şi înmulţire (multiplicativ).

Considerăm (urmărind expunerea lui R. M. Martin [1]), sistemul generat de (PP |_ε), puterile lui ε irelevante, deoarece sistemul conține numai clase de individuali şi nu clase şi perechi ordonate. „Atomii" sistemului sunt întregi pozitivi, iar PP semnifică „<" (relația „a fi mai mic"). Se introduc următoarele definiții şi principii:

D_1 „Int x" pentru $(Ey)(x < y \vee y < x)$"

D_2 „x = Int y" prescurtează „$(\text{Int } x.\ \text{Int } y \cdot \sim x < y \cdot \sim y < x)$"

Pr_1 |– $(Ex)\ (\text{Int } x.\ \sim (Ey)y < x.\ (z)(\sim (Ey)y < z \supset z =_{\text{Int}} x))$

D_2 „x Suc y" abreviază „$(y < x.\ (z)(y < z \supset \sim z < x))$"

Pr_2 |– $(x)(\text{Int } x \supset (Ey)y \text{ Suc } x)$

Pr_3 |– $(x)(y)(z)\ ((x \text{ Suc } y.z \text{ Suc } y) \supset x =_{\text{Int}} y)$

Pr_4 |– $\sim (Ey)(x)\ (\sim (Ez)z < x \supset x \text{ Suc } y)$

Pr_5 |– $(w)((x))\text{Int } x.\ \sim (Ey)y < x) \supset x \in w) \cdot (x)(y)(z)((x \in w \cdot y \text{ Suc } x) \supset y \in w)) \supset (x)\ (\text{Int } x \supset x \in w))$

D_3 „Cls" pentru „$((\sim \text{Int } x.\ \sim (Ey)(y \in x) \vee (Ey)\ (y \in z)$"

Pr_6 |– $\sim (Ex)(\text{Cls } x.\ \text{Int } x)$

Pr_7 |– $(x)(\text{cls } x \vee \text{Int } x)$

Pr_8 |– $(x)(y)(x \in y \supset (\text{Int } x.\ \text{cls } y))$.

Pr_9 |– $(Ex)(y)(y \in x) = - - y - -)$, unde „– – y – –" este orice forma propozițională a sistemului care nu conține apariții ale lui ∈.

Pr_{10} |– $(x)((\text{Int } x \cdot \sim (\sim (Ey)(y \in x \cdot (z)(\sim (Ey)y < z \supset z = \text{Int}(x)) \supset \supset (Ey)y < x)$

Pr_{11} |– $(x)\ ((\text{cls } x \sim \sim (Ey)y \in x) \supset (Ey)y \in x)$.

Pr_{12} |– $(x)\ (y)\ ((\text{Int } x \cdot \text{Int } y(z)(z < x \equiv z < y)) \supset x = \text{Int } y$

D_4 „$x_{cls} = y$" abreviază „$(\text{cls } x \cdot \text{cls } y)(z)z \in x \equiv z \in y))$"

Pr_1 stipulează existența şi unicitatea întregului 1

Pr_2 semnifică orice întreg are un succesor

Pr_3 succesorul este unic

Pr_4 1 are proprietatea de a nu succede

Pr_5 formulează principiul inducției matematice

Aceste 5 principii constituie o adaptare a postulatelor lui Peano.

Pr_6 enunță că nici o clasă nu este întreg

Pr_7 afirmă că orice lucru este sau o clasă (de întregi) sau un întreg.

Aceste principii enunță că clasele şi întregii sunt mutuali exclusivi

Pr_8 enunță că întregii poartă „$\in$" la clase şi numai clasele sunt generate de întregi.

Pr_9 stipulează existența clasei, principiul formulează restricția că este admisă numai existența claselor de întregi.

Pr_{10}, Pr_{11}: orice întreg diferit de 1 are un întreg mai mic; orice clasă, alta decât clasa vidă (nulă), are un membru.

Pr_{12} formulează principiul nominalismului pentru relația „<", iar principiul pentru „$\in$" derivă din D_4.

Luând simbolurile „+", „x" ca factori primitivi pentru adunarea şi înmulțirea întregilor putem formula axiome corespunzătoare, rezultatul fiind elaborarea unui sistem puternic pentru *aritmetică* şi suficient pentru *teoria numerelor raționale* şi chiar pentru o *teorie constructivă a numerelor reale şi complexe.* Şi, deşi infinit, în virtutea lui P_2, P_3, P_9, acest sistem se dovedeşte acceptabil nominalistic, Goodman [3, p. 166], nerespingându-l, adică „unele sisteme cu ontologii infinite sunt nominaliste", condiția este să satisfacă criteriul fundamental al nominalismului.

Se pot construi sisteme înrudite aritmeticii cu un singur atom, numărul 1, care satisfac cerințele Goodman, o altă posibilitate constă în apelul la clase şi relații diadice dintre individuali admise ca valori pentru variabile, dar nu relații de ordin înalt. Ancestralii relațiilor diadice dintre întregi sunt definibili în sistem şi dacă relații de ordin mai înalt sunt admise, atunci „+" şi „x" devin definibile; sistemul va presupune o logică de ordinul doi cu variabile-relații cuantificate care adiționează şi axioneme extralogice, o bază puternică chiar şi pentru o teorie a numerelor reale şi complexe. O direcție interesantă vine din considerarea *infinitezimalelor* admise ca atomi ai sistemului, o posibilitate de dezvoltare a sistemelor în acord cu *analiza non-standard;* numărul atomilor devine nenumărabil, iar principii adecvate ale nominalismului şi compunerii devin demonstrabile; în fine există şi posibilitatea oferită de o teorie de ordinul al treilea;

$$(x)\,(y)\mid(z)\,(z(\varepsilon|\varepsilon)\,x \equiv z\,(\varepsilon|\varepsilon)y) \supset x = y)$$

vizând o limitare severă a fundamentelor de teoria mulțimilor.

Doctrina semantică a „*numelor comune*" şi cea a „*naturilor comune*", care sunt înrudite, permit un nominalism autentic, care cere o formulare a calculului individualilor şi o formulare adecvată a teoriei mulţimilor Zermelo-Skolem-Fraenkel; se adaugă la principiile logico-matematice şi unele principii empirice sau postulate de semnificaţie, acestea din urmă necesare „guvernării predicatelor non-logice". Desigur, este necesară o discuţie despre semantica teoriei (discutarea relaţiilor semantice – designarea şi denotarea, formularea unor reguli de designare şi denotare ca principii semantice). Comentariul semantic priveşte relaţia „*Inst.*" ca *primitiv*, dar care nu conduce la o relaţie care generează, ea facilitând discursul matematic despre individuali; fiind o sub-relaţie a relaţiei parte-întreg, deci nu prezintă interes ontologic, domeniul lui „*Inst.*" fiind inclus în domeniul lui P, prin urmare nu introduce individuali noi. Care este statutul acestui *primitiv*? Este o relaţie logică sau matematică? După opinia lui R. M. Martin relaţia „*Inst.*" (de la instance = exemplu, instanţiere) este una matematică, iar relaţia Inst. E_q, a *echivalenţei instanţiale* nu este una de identitate, ci o relaţie teoretică specială care conectează entităţi în anumite moduri înăuntrul teoriei instanţierii". Concepţia în cauză este una *finitistă,* în sensul următor: cardinalitatea entităţilor întregii teorii este cardinalitatea individualilor admişi, enunţată în termenii *identităţilor mereologice* şi nu ai *egalităţii instanţiale.* Dar în termenii egalităţii instanţiale este avansată o procedură a colecţiilor transfinite care includ o parte suficient de vastă a teoriei cardinalilor şi ordinalilor transfiniţi. Concepţia prezentată refuză clasele ca valori ale variabilelor, deci clasele nu sunt necesare în matematică, eventual le admite ca individuali în contexte adecvate ce conţin „*Inst*". Sunt demonstrate principii referitoare la numere, spaţii topologice etc. Importante sunt legile, şi nu entităţile, atunci când discuţia este purtată în plan ştiinţific, după cum din punct de vedere filosofic natura entităţilor prezintă interes fundamental. De aici irelevanţa individualilor aleşi ca fundamentali, R, M. Martin afirmă în context: individualii pot fi luaţi drept obiecte fizice (în acord cu *reismul*), sau ca obiecte fizice (în spiritul *fizicialismului*), sau ca evenimente (cum sugerează o *filosofie a procesului*), în fine drept *quali*, când împărtăşim *fenomenalismul* lui Goodman. Este evident atunci că axiomele adiţionale sau postulatele de

semnificație sunt intenționate să guverneze individualii particulari aleşi şi predicatele adiționale destinate să-i caracterizeze. Se înțelege că nominalismul implică dificultăți semnificative în fundamentele matematicii. *Calculul individualilor* reprezintă „*corelatul nominalist*" al *calculului claselor* specific platonismului. O problemă apare în legătură cu postulatele adiționale şi predicatele primitive adiționale. Dar, se întreabă Stegmüller [1], care este criteriul ce determină alegerea postulatelor şi predicatelor adiționale? Desigur, nominalismul nu va accepta un sistem care rezultă din adăugarea la calculul indivizilor elaborat de N. Goodman a *teoriei mulțimilor* în *varianta Zermelo.* Dincolo de domeniul de individuali concreți contează, deci, (dincolo de variabilele individuale), ce alte tipuri de variabile de ordin mai înalt sunt admise; în cazul sistemelor Zermelo-von Neumann sunt admise variabile de un singur tip; este important să cercetăm dacă variabilele sistemului acceptă clase ca valori, ceea ce revine la diferența dintre *concret-abstract.* Distincția dintre *nominalism-platonism* este una mai puțin „*sharp*" (fermă) decât cea dintre cele două poziții platoniste, formulabile cu ajutorul considerațiilor în termeni cantitativi; *numărabil-nenumărabil.* Se poate atribui un corelat cantitativ conceptului nominalist de *finitudine* în această privință? Pozitiv, dacă infinitul nu este exprimabil în nominalism, ceea ce nu este cazul, întrucât dacă „a ≤ b" reprezintă enunțul relațional „a este o parte autentică a lui b", atunci avem în interiorul nominalismului o *axiomă a infinitului* de forma: (x) (Ey) (y ≤ x) şi care exprimă faptul că orice individual are o parte autentică. Şi în ipostaza că *domeniul individualilor (domeniul de discurs)* este format dintr-un singur obiect, întrucât acest obiect are o parte diferită de el însuşi, autentică, care la rândul ei posedă o parte autentică, ş.a.m.d., ne-am angajat într-un demers *ad infinitum* în virtutea căruia obținem un domeniu de lucruri diferite infinit de multe.

Este ştiută aversiunea nominaliştilor față de *obiecte abstracte,* motivată prin „*antipatia*" lor față de *domenii infinite;* ei resping cuantificarea universală şi existențială peste numere naturale, argumentând că domeniul acestor entități este infinit. Quine a arătat că teoria claselor este „*traductibilă*" într-un limbaj nominalist având la bază un domeniu finit, semnul Σ, de asemenea, cuantificarea restricționată

peste clase („x^l)(k") poate fi eliminată din context drept o prescurtare lingvistică „pentru toate clasele de ordinul întâi de la 1 la k". Dar, dacă admitem domenii infinite trivializarea teoriei claselor în maniera nominalistă nu se mai produce. Concluzia semnificativă care se degajă este următoarea: în spatele aversiunii nominaliste față de obiecte abstracte se află *respingerea infinitului.* În absența infinitului orice discuție despre clase este neproductivă, orice context platonist putând fi reformulat nominalistic ca pur şi simplu *façon de parler*, pentru că *esența relevantă a nominalismului* rămâne *finitismul.* Diferența dintre *nominalism* şi *platonism* rezidă în distincția dintre *finit şi infinit.* Diferența dintre platonism şi nominalism dacă poate fi făcută clară în lumina distincției dintre abstract şi concret, este evidentă, însă, în termenii recunoaşterii sau respingerii unui *univers infinit* de lucruri. Înțelegem acum dificultățile traducerii autentice a contextelor platoniste în contextele nominaliste. Construcția nominalistă a logicii şi matematicii, dacă se vrea consistentă, va *„expedia"* orice referire la infinități, indiferent dacă numărabile sau nenumărabile, ca simplu *façon de parler*, un mod de abreviere a enunțurilor despre finit de multe obiecte. *Revizuirea nominalistă* a matematicii este mai drastică decât cea *constructivă,* aceasta din urmă „se retrage în fața *domeniilor nenumărabile*, dar *nu* oricum *de la cele infinite"*. O construcție nominalistă a matematicii, conchide Stegmüller, pare o ficțiune nerealizabilă.

5.4. CONCEPTUALISMUL CONSTRUCTIV: HAO WANG

Alternativa la „colapsul" *conceptualismului ontologic* o reprezintă *conceptualismul constructiv* care, contra-dictinct față de *platonismul extensional*, asumă exigența: *„condițiile care definesc"* pentru clase trebuie să se conformeze anumitor principii de construcție, condiții îndeplinite numai de elementele clasei în cauză, o metodă inspirată de geometrie. Nu se mai operează cu o clasă *infinit accesibilă*, acum avem

de-a face cu „*condiții care definesc*", exprimate logico-matematic prin propoziții deschise de forma Gx, în care x are rol de variabilă liberă. Prin urmare, clasa β este determinată cu ajutorul condiției Gx, dacă şi numai dacă următorul enunț este valabil:

1) $$(x)(x \in \beta \equiv Gx)$$

Mai explicit, indiferent de condiția Gx aleasă, există o clasă care are relația descrisă anterior. Prin urmare, trebuie să considerăm valabil enunțul:

2) $$(E\beta)(x)(x \in \beta \equiv Gx)$$

pentru orice substituții ale variabilei x în locul lui Gx.

Acesta este *principiul abstracției* presupus tacit sau explicit în *teoria clasică a mulțimilor*.

„*Condiția care definește*" o clasă ne angajează la o terminologie constructivistă. Punctul de vedere platonist susține că şi condiția şi aplicarea principiului (2) nu sugerează faptul că o clasă a fost „*creată*", ci mai curând „*aleasă*", din totalitatea claselor care există independent, cu ajutorul condiției Gx. Stegmüller propune s-o numim în loc de „*condiție care definește*", „*condiție de alegere*". „*Metafora pescarului*" care prinde în năvod o mulțime de peşti este relevantă pentru concepția strict platonistă, activitatea teoreticianului claselor nefiind comparabilă cu aceea a unui inginer care pe baza planului ridică construcții.

Alternativa la *platonismul strict* este *construcționalismul*, care presupune că, intuitiv, clasele sunt construite succesiv conform unor principii de ordine, astfel că individualii au ordinul 0, clasele primesc ordinul 1, iar clasele de clase de individuali au ordinul 2 ş.a.m.d., în fapt o construcție a unei *ierarhii a claselor*, în lumina căreia se impune o modificare a *principiului abstracției clasei* (2): clasa β trebuie să fie de un ordin superior ordinului lui x şi toate variabilele legate care apar în Gx au un ordin mai coborât decât β; prin urmare, ordinele vor parcurge un sens ascendent cumulativ, încât orice variabilă care reprezintă clase de ordin n are toate ordinele mai mari decât n. În lumina acestor considerații *principiul abstracției clasei* este suplimentat cu restricția impusă axiomei care permite inferența de la toți (all) la orice caz particular:

(3) $(x)\, Gx \rightarrow Gy$

unde ordinul lui y nu depăşeşte pe cel al lui x. Variabilele din cadrul formulei Gx pot să nu aibă ordinul lui β. Putem acum înțelege conexiunea dintre aceste fapte şi *definițiile impredicative* care, în esență, înseamnă introducerea unei clase prin referință la o totalitate căreia clasa în cauză îi aparține. Gândirea logico-matematică constructivă taxează această procedură ca responsabilă de „*cercul vicios*". Platonismul strict nu vede atacabil cercul vicios, deoarece consideră că noua clasă nu este „*creată*", ci aleasă dintr-o totalitate deja disponibilă. Constructivistul va acuza platonismul strict (implicit definițiile impredicative) ca fiind o poziție care dă naştere antinomiilor şi de aceea va formula prohibiția definițiilor impredicative prin stipulări adiționale asupra valorilor legate, astfel dacă în Gx apare variabila legată (α) de acelaşi ordin cu β care este construită, valorile cuantificabile ale lui (α) vor include toate obiectele de ordin n, în particular clasa β. Cercul este evitat.

Teoria constructivistă evită cunoscuta antinomie russelliană, cineva putând construi pentru orice ordin n clase ale tuturor claselor de ordin n care nu se conțin pe ele însele ca membru:

(4) $(E\beta^{n+1})(X^n)[X^n \in \beta^{n+1} \equiv \neg(X^n \in X^n]$

clasa stipulată este de oridnul n+1 şi problema dacă este un membru al ei însăşi sau nu, nu conduce la paradox. Din (4) nu se poate deriva enunțul contradictoriu, corespunzător antinomiei lui Russell.

(5) $(E\beta^{n+1})\ [\beta^{n+1} \in \beta^{n+1} \equiv \neg(\beta^{n+1} \in \beta^{n+1})]$

Ca să avem această derivare folosim formula:

(6) $(X^n)[X^n \in \beta^{n+1} \equiv \neg\ (X^n \in X^n)] \supset [\beta^{n+1} \in \beta^{n+1} \equiv \neg\ (\beta^{n+1} \in \beta^{n+1})]$

un enunț care violează restricția asupra regulei $(x)\, Gx \rightarrow Gy$; validitatea enunțului pentru toți α de ordin n, nu implică validitatea pentru un obiect particular de ordin n + 1. Modificarea *principiului abstracției clasei* şi restricția formulată în (3) alcătuiesc *teza conceptualistă* conform căreia entitățile abstracte (să spunem clasele) nu există (poate preexistă), ci sunt *produse* ale activității mentale, devine clar că ceea ce conceptualismul psihologic a formulat vag drept o teorie a abstracției, în *conceptualismul constructiv*, acelaşi lucru se exprimă cu exactitate logică.

Deoarece criteriul pentru *platonism* îl reprezintă utilizarea, în sistemul construit, a *variabilelor* pentru *obiecte abstracte* – clase – *conceptualismul constructiv* poate fi abordat de pe poziția platonismului; va fi distins de platonismul strict, conform căruia clasele nu trebuie să satisfacă principii constructive, fiind suficientă procedura fixată în ceea ce s-a numit „*metafora pescarului*".

Constructivismul presupune *renunțarea* la *teoria transfinițiilor cu ierarhia lor*, căci pentru a construi această teorie este nevoie de teorema lui Cantor care afirmă că, clasa subclaselor unei clase date este de o putere mai mare decât a clasei însăşi; dacă clasa în chestiune este infinită, atunci clasa subclaselor reprezintă o infinitate de o putere mai mare. Dar, teorema lui Cantor presupune în demonstrație o definiție impredicativă. Se poate ilustra printr-un exemplu particular al demonstrației lui Cantor, că mulțimea tuturor numerelor întregi pozitive nu este numărabilă, ceea ce este identic cu demonstrația *nenumărabilității numerelor reale*, deoarece orice număr real individual poate fi construit ca o mulțime de numere pozitive.

Ştim că G. Cantor, plecând de la faptul că nici o enumerare nu acoperă toate mulțimile de numere întregi pozitive, a tras concluzia că mulțimea tuturor mulțimilor de numere întregi pozitive este *absolut nenumărabilă*. Constructivismul respinge această inferență a nenumărabilității mulțimii tuturor mulțimilor, care ar fi justificată doar în prezența asumpției, că există o mulțime care cuprinde toate mulțimile de întregi pozitive, sau o lege care ar defini această mulțime, un argument consonant cu linia de gândire proprie platonismului, postularea infinității complete, încheiate fiind declarată, în consecință, drept o ficțiune; lăsăm la o parte implicațiile indezirabile antrenate de definiția impredicativă a lui P – mulțimea întregilor pozitivi. A determina dacă un număr întreg pozitiv n aparține mulțimii P trebuie să examinăm toate elementele mulțimii tuturor mulțimilor, notată MM, inclusiv mulțimea P. Numai considerarea mulțimilor ca fiind independente, înainte de introducerea lor prin definiție şi enunțuri despre ele ar dizolva absurditatea, însă atare supoziție conduce la paradoxul lui Russell, bazat

pe *metoda diagonalei* a lui Cantor şi definiţia impredicativă; regulile (3) şi (4) restricţionând ordinul variabilelor legate în „Gx", ca şi ordinul lui x şi y în (x) Gx → Gy formulează prohibiţii în aplicarea procedurii şi similar a procedurii de construire a claselor.

Hao Wang a oferit, după opinia lui Stegmüller, cele mai bune *fundamente constructiviste* ale matematicii, care conţin intrinsec avantaje deosebite din *perspectivă metamatematică*. Urmăm şi aici, ca în întregul cuprins al acestei părţi a cărţii noastre, ideile lui Stegmüller.

Sistemul Σ are următoarele proprietăţi: a) este o teorie constructivistă, în sensul descris, al *construcţiei cumulative a conceptului de ordin*; b) *ierarhia ordinelor este continuată în transfinit*; c) nu este un sistem de sort uzual, ci reuniunea unui şir infinit de sisteme mai bogate.

Teoria este construită constructiv, în sensul următor: domeniul de obiecte de ordin 0 constă într-o *totalitate numărabilă*, cum ar fi totalitatea numerelor întregi pozitive; obiectele de ordinul 1 sunt acelea de ordin 0 (aici se vede *cumulative construal* a conceptului de ordin) plus toate mulţimile de obiecte de ordin 0 care pot fi definite în termenii proprietăţilor care se referă cel mult la totalitatea tuturor obiectelor de ordin 0, ceea ce corespunde restricţiei formulată asupra schemei (2); proprietăţile menţionate în ultima noastră propoziţie trebuie să fie descrise prin formule care nu conţin variabile legate de un ordin mai înalt decât 1. Analog, pentru orice număr pozitiv n, mulţimile de ordin n + 1 includ toate mulţimile de ordin n, precum şi acele mulţimi care sunt definite prin formule în care apar variabile legate de cel mult ordinul n (adică definite în termenii acelor proprietăţi care referă cel mult la totalitatea tuturor mulţimilor de ordinul n); mulţimile ω cuprind toate, şi numai, mulţimile de ordin finit. Analog legăturii dintre mulţimi de ordin n + 1 şi acelea de ordin n, tot aşa pentru orice ordinal α, mulţimile de ordin α + 1 sunt legate de cele de ordin α; deci, raporturi similare. Mulţimile de ordin β, dacă β este un *număr limită* al unui şir monoton crescător de ordine α_1,α_2... de numere ordinale sunt legate (prin raporturi asemănătoare, descrise anterior) de mulţimi de ordin α_1,α_2, tot aşa cum mulţimile de ordin ω sunt legate cu mulţimi de ordin finit. Rezultatul

este remarcabil: *evitarea construcțiilor conceptelor impredicative dubioase* care s-ar putea introduce, eventual, la orice ordin considerat. Referirea la așa-numita *clasă a doua de numere a lui Cantor*, un „*împrumut suspect*" din teoria transfinitului, utilizat în descrierea ordinelor, nu este de interpretat peiorativ, întrucât se operează cu așa-numite numere ordinale constructive, care prin intermediul funcțiilor recursive, pot fi introduse de o manieră acceptabilă din punct de vedere *constructivist*.

Trecem peste detalii ale construcției sistemului Σ (al lui Hao Wang) și ne oprim asupra unor considerații generale, mai în acord cu interesul nostru filosofic. Sistemul reprezintă o *formalizare a matematicii pe baze constructiviste*; ca un rezultat *remarcabil*, una dintre cele mai controversate axiome ale teoriei mulțimilor, am numit *axioma alegerii*, este demonstrabilă în sistemul Σ și astfel este evitat statutul ei incomod de axiomă. Deși „*Principia Mathematica*" a fost intenționată de autorii ei să fie o *teorie constructivistă*, ea conținea pe lângă mult controversata axiomă a alegerii, alte două axiome dezagreabile - cea a *infinitului* și cea a *reducerii* – care în sistemul lui Hao Wang devine superflue și tot așa recursul la concepte neconstructive. Majoritatea metodelor propuse de Quine [3], sau cele bazate pe *teoria non-elementelor*, au operat cu un concept de mulțime care, *din punct de vedere intuitiv*, se vădea *obscur* și *complicat* ca instrument în abordare. Coincidența operațiilor efectuate în Σ cu cele din gândirea intuitivă proprie matematicii clasice determină opțiunea pentru sistemul lui Wang, privind construirea în acesta a unor demonstrații matematice clasice. Sistemul lui Wang nu conține *propoziții formal indecidabile*, un deziderat interesant și surprinzător, știut fiind că în realitate toate sistemele suficient de bogate posedă asemenea propoziții. Rațiunea profundă a acestui rezultat pozitiv trebuie căutată în faptul că sistemul Σ reprezintă o reuniune a seriilor de sisteme mai bogate (ever richer systems), $\Sigma\alpha$, unde α este un ordinal constructiv. Pentru un α arbitrar, G este o propoziție formal indecidabilă în $\Sigma\alpha$. Teorema luii Gödel, în acest context, poate fi reformulată astfel ca enunț metateoretic: „«$\Sigma\alpha$ este consistent implică», «G este indemonstrabilă

(în $\Sigma\alpha$)»". „*Aritmetizarea metamaticii*" facilitează obținerea acestui rezultat. Enunțul G când este „*interpretat material*" asertează propria sa indemonstrabilitate, propoziția „G este indemonstrabilă" fiind restituită în sistemul formal prin propoziția G. Pe de altă parte, enunțul „$\Sigma\alpha$ *este consistent*" poate fi formalizat în moduri diferite în $\Sigma\alpha$, de exemplu prin formula C. Dar, şi enunțul „$C \rightarrow G$" este demonstrabil în $\Sigma\alpha$. Din demonstrația formulei „C", în fapt a consistenței lui $\Sigma\alpha$, formula G poate fi inferată prin aplicarea regulei modus ponens; avem demonstrată propoziția formal indecidabilă a sistemului $\Sigma\alpha$, din care Gödel a obținut *a doua sa teoremă celebră* care afirmă „consistența unui sistem, nu poate fi demonstrată cu mijloace disponibile ale sistemului însuşi". Acum avem o situație diferită, deoarece S reprezintă sisteme reunite şi consistența unui sistem $\Sigma\alpha$ poate fi efectiv demonstrată într-un sistem $\Sigma\alpha + 2$. Decurge logic că propoziții formal indecidabile ale lui $\Sigma\alpha$ construite conform procedurii gödeliene pot fi demonstrate în $\Sigma\alpha + 2$.

Remarcă: Acest rezultat pozitiv remarcabil nu trebuie înțeles în sensul că în sistemul Σ nu există propoziții formal indecidabile, deci atunci când considerăm sisteme individuale din Σ lucrul rămâne posibil, adică acestea conțin asemenea propoziții. Se produce aici următoarea „*metamorfoză*" şi anume, propoziții care au fost indecidabile devin decidabile prin „*ascensiunea ordinală*", sau poate în suita ierarhică a ordinelor. Mai concret, deoarece nu există cel mai mare α, pentru orice sistem $\Sigma\alpha$ exista un sistem $\Sigma\alpha + 2$ în interiorul lui Σ, în cadrul căruia se poate dispune de o demonstrație formală a consistenței lui $\Sigma\alpha$, poate fi produsă în sistemul individual $\Sigma\alpha + 2$. Posibilitatea acestei demonstrații a consistenței lui $\Sigma\alpha$ în $\Sigma\alpha + 2$ conține două aspecte: nu înseamnă că întregul sistem este consistent, constructivitatea asigurând doar garanții pentru acest lucru; şi o promisiune mai tentantă, anume „*demonstrații finitare*" ale consistenței pot fi oferite pentru orice $\Sigma\alpha$ particular, aşa cum se poate vedea în lucrările lui Lorenzen şi Schütte; o conexiune evidentă cu „*teoria ramificată a tipurilor*" şi structura fiecăruia din sistemele $\Sigma\alpha$ face aplicabile aceste demonstrații de consistență sistemelor $\Sigma\alpha$. Iar o „*consecință senzațională*" este evidentă; întrucât Σ reprezintă

reuniune sistemelor $\Sigma\alpha$ decurge imediat şi consistenţa lui Σ; „*programul lui Hilbert*" îşi poate găsi realizarea în *contexte constructiviste*, deoarece se obţine o demonstraţie de consistenţă pentru un sistem (Σ) care în fapt reprezintă o formalizare a întregii matematici.

Relevanţa set-teoretică (în termenii teoriei mulţimilor) a sistemului Σ elaborat de Hao Wang este, de asemenea, remarcabilă şi anume, nu conţine „*mulţimi absolut ne-numărabile*"; într-adevăr, dacă considerăm toate mulţimile de ordin α, atunci există o funcţie de ordinul $\Sigma\alpha + 2$ care *enumără* toate aceste mulţimi de ordin α. Mai mult, nu numai că nu există mulţimi absolut ne-numărabile, nu există nici mulţimi nenumărabile în interiorul teoriei Σ. Se poate, totuşi, identifica un corelat al „*ne-numărabilităţii clasice*" în ceea ce aici este numit «quasi-ne-numărabilitatea» definită astfel: „pentru orice ordin β există mulţimi care nu pot fi numărate (counted) prin intermediul mulţimilor sau funcţiilor de acelaşi ordin β". Divergenţa dintre *constructivist* şi *platonist* în problemă rezidă în interpretările: *platonistul* plecând de la faptul că *nu există o enumerare a totalităţii tuturor mulţimilor de numere întregi pozitive* conchide că *există mulţimi ne-numărabile*; *constructivistul*, să spunem că avem teoria constructivistă Σ, afirmă, în contrast cu platonistul, că nu *existenţa mulţimilor ne-numărabile* este responsabilă de imposibilitatea *enumerării* totalităţii tuturor mulţimilor de numere întregi, ci, aceasta mai curând, rezidă în „*incapacitatea noastră mentală*" de a formula o idee clară şi precisă a totalităţii tuturor mulţimilor (funcţiilor, legilor) care definesc enumerarea; deci, cu atât mai mult este lipsită de semnificaţie noţiunea de *mulţimi absolut ne-numărabile*.

Hao Wang [2] a făcut următoarea remarcă: totalităţile nenumărabile (de exemplu: mulţimea tuturor mulţimilor, mulţimea tuturor mulţimilor de numere naturale) sunt conexate *mulţimilor constructibile*, aşa cum în sens kantian „*lucrul în sine*" este legat de experienţa posibilă. În acest spirit intrăm în „*sfera transcendentală*" unde investigăm totalităţi transcendentale, zona unde posibilităţile de construcţii şi descoperiri noi sunt nelimitate.

Stegmüller, în studiul folosit de noi în acest paragraf, observă temeritatea *teoriei clasice* înzestrată cu *ierarhia transfiniţilor*:

proclamarea *ideilor* în sens *kantian* ca *forme ideale* în sens *platonician*, un gen de „*absolutism*" care este incompatibil cu gândirea constructivă, o temeritate „plătită" cu apariția *antinomiilor*; soluția este numai înlocuirea *platonismului strict* cu *conceptualismul constructiv* care prin reprezentantul său marcant, Hao Wang, a făcut o conexiune profundă între *problema universalelor* şi *domeniul fundamentelor logico-matematice*, în alte cuvinte, adăugăm noi, conexiunea între *filosofia generală* şi *filosofia matematicii.*

5.5. LOGICISMUL ŞI INTUIȚIONISMUL

Frege şi Russell au aprofundat remarcabil *programul euclidian*, ei vor scruta zonele mai adânci ale acestuia, pentru a obține o *fundare* satisfăcătoare a matematicii. Demersul fundaționist logicist a fost inspirat de climatul intelectual-matematic din a doua jumătate a secolului al XIX-lea, când în matematică se producea un eveniment cu semnificații fundaționale neobişnuite: aritmetizarea analizei şi algebrizarea geometriei, rezultat al activității unor matematicieni ca Gauss, Weierstrass, Dedekind, Cantor şi Klein, care continuau opera lui Descartes. Într-un asemenea context, devenea evident că *fundarea analizei* şi *geometriei* depinde de *fundarea aritmeticii.* Programul euclidian al lui Frege şi Russell țintea o aşezare mai adâncă a fundamentelor, ei căutau principii (termeni primitivi, axiome) mai fundamentale decât cele stabilite de Peano; principiilor aritmetice ale lui Peano le sunt preferate principii logice, *euclidianismul matematic*, o adevărată istorie „*a detronării surselor intuitive ale cunoaşterii matematice*", restabilea în secolul al XIX-lea *intuiția aritmetică* care fusese abandonată, odată cu descoperirea numerelor iraționale, în favoarea intuiției geometrice; paradoxal, clarificarea conceptului de *numere iraționale* va trimite în secolul al XIX-lea înapoi la intuiția aritmetică, care devine dominantă, remarca Lakatos [1], [2].

Dar, aproape imediat, vor intra în competiție şi alte tipuri de intuiție, având caracter paradigmatic şi înalt relevant pentru mutațiile ce se produc

în *modul de gândire matematic: intuiția set-teoretică* (imanentă teoriei cantoriene a mulțimilor), *intuiția logică* (Russell), *intuiția „globală"* hilbertiană şi *intuiția constructivistă sau constructivă* Brouwer).

În contextul abordării noastre este, în mod natural, de interes deosebit *intuiția logică*, care a avut un statut special şi controversat. În viziunea logiciştilor, euclidianismul ca program „*dogmatic*" necesita intuiția logică, trivială şi infailibilă pentru fundarea matematicii. Părea un imens câştig teoretic şi metodologic să se poată arăta că *întreaga matematică* poate fi întemeiată pe intuiția logică, unica sursă a certitudinii ei, atât în ceea ce priveşte axiomele, cât şi în ceea ce priveşte transmiterea adevărului. Dar, s-a obiectat imediat că autoevidența este un element subiectiv care „împietează" asupra rigorii logice, iar „*epurarea*" *intuiției logice* de orice element străin de ea cerea manevre complicate, în sensul unei ierarhii de construcții quasi-sistemice, căci logica devenind un *supra-sistem deductiv euclidian trivial*, o logică supra-trivială este necesară ca instanța de legitimare.

Oricum, Russell rezuma programul în cuvintele următoare: „toată matematica pură – aritmetica, analiza şi geoemtria – este construită prin combinații de idei primitive ale logicii şi propozițiile ei sunt deduse din axiome generale ale logicii, astfel ca silogismul şi alte reguli de inferență. Aceste axiome vor fi acum realmente trivial adevărate, strălucind dincolo de dubiu în lumina naturală a rațiunii pur logice, corectitudinea, fiind fixată într-o *fundare eternă*, de atins...".

S-a văzut, însă, că aşa-numita logico-trivializare, intenționată prin programul logicist, al matematicii, a degenerat în fapt, cum remarca Lakatos, în unul din cele mai complicate labirinturi conceptuale ale minții umane. Într-adevăr, „*Principia*" s-a dezvăluit investigațiilor fundaționale ca sistem logic sofisticat, conținând axiome ca cea a *reducerii, a infinitului* şi *a alegerii*, precum şi complicata *teorie ramificată a tipurilor*. (În terminologia metamatematicii, teoria tipurilor este considerată ca parte a regulilor de formare a *formulelor bine formate* şi nu a axiomelor. Kemeny apăra logicismul, considerând că matematica nu este ceva mai mult decât logica înalt dezvoltată (highly developed logic)). Russell a

conştientizat că pentru programul său euclidian trivialitatea teoriei tipurilor era vitală, observa Putnam [2], el sperând că aplicarea „*principiului cercului vicios*", în fapt lipsa de semnificaţie a enunţurilor autoreferenţiale, va conduce la eliminarea inconsistenţei logicii naive. Axiomele respective aveau un caracter problematic şi nu satisfăceau cerinţa analiticităţii, în sensul specific de a avea loc în toate cazurile (lumile!) posibile, şi deci să nu aibe conţinut factual. În ceea ce priveşte *axioma reducerii*, folosită în „*Principia*", studiile fundaţionale întreprinse de F. P. Ramsey, arătând inutilitatea teoriei ramificate a tipurilor, au învederat faptul că axioma nu este indispensabilă în sistem. Se cunoaşte simpatia intelectuală a membrilor *Cercului de la Viena* pentru concepţia logicistă, sursă autentică a empirismului logic. Iată de ce aceştia, îndeosebi Carnap, au depus eforturi considerabile pentru a arăta caracterul analitic al celorlalte două axiome: axioma infinitului şi axioma alegerii. În acest sens, Carnap mărturiseşte că el a fost înclinat să admită caracterul lor analitic, cerinţă a considerării lor ca principii ale matematicii. Dacă în timpul şederii sale la Viena nu obţinuse o claritate completă şi definitivă asupra caracterului analitic al axiomelor respective, mai târziu a afirmat că axioma alegerii nu este analitică, dacă acceptăm conceptul de clasă, utilizat în matematica clasică, în contrast cu cel restrictiv-constructivist; iar axioma infinitului poate fi considerată analitică, afirma Carnap, dacă vom lua ca individuali nu lucruri, ci poziţii.

Teza centrală a *programului logicist* este că *matematica este logică*. Pentru a înţelege demersul fundaţional al logicismului realizat în „*Principia*" sunt necesare clarificări ale aspectelor-ingrediente ale programului şi care nu sunt numai de interes istorc, ştiut fiind că se încearcă reabilitări, revigorări ale lui, prin operarea unor modificări şi interpretări ale premiselor. Dintre încercările recente, cea întreprinsă de H. Putnam [2] ni se pare cea mai convingătoare.

Aspectele fundaţionale ale „Principiei" au constituit obiectul preocupărilor lui Russell încă înainte de a colabora cu Whitehead, între ideile fundaţionale mai importante fiind *teoria tipurilor* şi *axioma reducerii*, Russell a înţeles prin logică = *teoria cuantificării* şi *funcţii propoziţionale*.

Logica lui Russell presupune un univers *multisortat* cuprinzând: colecția tuturor individualilor (nivelul zero), colecția tuturor funcțiilor propoziționale care au individualii ca argumente (nivelul unu), colecția tuturor funcțiilor propoziționale care iau ca argumente funcțiile propoziționale de nivelul unu (nivelul doi) etc.

Intenția lui Russell a fost să reducă *teoria numerelor* la *teoria mulțimilor*, iar teoria mulțimilor la *logică*, concepută de el ca fiind în mod esențial *teoria funcțiilor propoziționale*. Putnam consideră procedura lui Russell sofisticată şi consideră că unele simplificări şi reinterpretări ale abordării prezente în „*Principia*" ne-ar arăta că există diferențe între ceea ce Russell a intenționat şi ceea ce s-a întâmplat în fapt. În acest sens, Putnam consideră că pot fi operate două simplificări în abordarea russelliană a logicii:

i) funcțiile propoziționale pot fi identificate ca fiind în fapt predicate, căci x în expresia F(x) nu semnifică „funcția propozițională F(x) are valoarea adevărat pentru argumentul x", adică are o propoziție adevărată ca valoare pentru argumentul x; ci în expresia F(x), simbolul F trebuie gândit ca stând pentru un predicat arbitrar de un nivel adecvat şi expresia F(x) o vom interpreta „x are proprietatea F";

ii) vom asuma că două predicate sunt identice dacă au aceeaşi extensiune (*axioma extensionalității*). Această asumpție devine falsă în virtutea interpretării clasice a predicatelor care le considera „universal luate *in intension*".

Cele două simplificări, odată admise, *predicat* înseamnă acum pur şi simplu *mulțime*, efectul lor condensat unitar fiind: F(x) înseamnă „x aparține mulțimii F". În general, funcțiile propoziționale, reinterpretate în lumina simplificărilor propuse, devin: mulțimi de individuali, mulțimi de mulțimi de individuali, mulțimi de mulțimi de mulțimi etc. *Universul de discurs* al logicii russelliene devine, în virtutea acestei reinterpretări, *sistemul tuturor mulțimilor* (de tip arbitrar finit), iar *logica* este în fapt *teoria mulțimilor*, o concluzie pe care Russell nu numai că nu a voit s-o admită, dar a respins-o explicit.

Logica russelliană, ca *parte fundațională* a matematicii, devine în lumina considerațiilor expuse un subiect controversat. Putnam [2] se

întreabă dacă nu era mai justificat să extindem semnificația cuvântului *logică*, încât să includă direct teoria mulțimilor şi teoria numerelor, decât să se manevreze complicat în modul în care s-a făcut şi anume, reducând teoria numerelor la teoria mulțimilor, iar aceasta, la rândul ei, la logica înțeleasă ca *teoria funcțiilor propoziționale.*

S-a obiectat că formulările lui Russell referitoare la funcțiile propoziționale nu au fost suficient de clare.

O funcție propozițională este o funcție ale cărei *valori* (nu argumente!) sunt propoziții. Deci, funcțiile propoziționale pot fi corelate biunivoc predicatelor în sensul de *universals taken in intension.* Dacă această definiție operează fără dificultate în unele cazuri, de exemplu considerăm predicatul „roşu", corespunzător acestuia există funcția propozițională „x" este roşu", adică funcția care aplicată oricărui x are ca valoare propoziția „x este roşu", în alte cazuri apar dificultăți conceptuale. Putnam dă exemplul funcției propoziționale „x a scris Waverley". În acest caz, care este valoarea funcției propoziționale „x a scris Waverley", ştiut fiind că individualul Walter Scott este autorul lui „Waverley"? Se poate răspunde că valoarea funcției propoziționale în chewstiune este propoziția: „Walter Scott a scris Waverley", sau propoziția: „Autorul lui Waverley a scris Waverley". Dificultatea poate fi rezolvată admițând numai prima simplificare a abordării russelliene a logicii, dar nu pe cea de-a doua, conchide Putnam [2], adică considerând funcția propozițională identică cu predicatul corespunzător. Se poate argumenta în favoarea considerării logicii ca *teoria predicatelor luate în intensiune* ori de câte ori se poate aegumenta pentru admiterea logicii ca teoria funcțiilor propoziționale.

Frege este considerat ca fiind primul logician care a elaborat un limbaj formal şi logica formală în sens modern, dar ideea construirii unui limbaj special unic matematic şi logic îi aparține lui Leibniz. Limbajul lui Frege a fost un *calcul al semnelor*, un sistem algebric definit matematic, care se deosebea de limbajul natural intuitiv, în sensul că *gramatica* este descrisă şi definită în termeni precişi, orice ambiguitate fiind eliminată.

Concepția lui Frege asupra fundării matematicii se bazează pe unele asumpții, la care a contribuit şi evoluția matematicii din secolul al XIX-lea, având în vedere constituirea geometriilor neeuclidiene. Aceste asumpții se referă la natura matematicii şi dintre acestea, mai importante sunt: 1) matematica este o ştiință independentă (nu există o realitate fizică care să servească ca o bază ultimă pentru matematică) şi 2) un tip de independență a matematicii ar poseda matematica chiar față de celelalte ştiințe, urmând că 3) intuiția matematică vizează direct structura abstractă a obiectelor matematice; 4) adevărurile matematicii ar fi, în consecință, independente de realitate şi experiență, stabilite în virtutea modului în care sunt folosite cuvintele, adică analitice; 5) matematica este derivată dintr-o mulțime de principii fundamentale, principii logice, adevăruri analitice, derivarea are loc într-un limbaj formal în care regulile logice de derivare (inferență) sunt enunțate explicit. Se introduce conceptul de *demonstrație* ca fiind o secvență de expresii simbolice, în care fiecare membru din secvență este sau un principiu universal, sau urmează din membrii anteriori în secvență în virtutea regulilor logice de inferență: *teorema* este un adevăr matematic care figurează ca *linia ultimă* în demonstrația formală.

Concepția filosofică derivată din abordarea fundațională a lui Frege este numită *logicism* şi, în esență, susține teza că *adevărurile matematice* sunt *analitice*, derivabile din *logica pură*.

Sistemul lui Frege exprimă formal unele adevăruri ale teoriei mulțimilor. Însă, sistemul nu este consistent, Russell reuşind să derive în interiorul lui o *contradicție,* anumite principii intuitiv naturale, ca principiul abstracției, au fost considerate false.

Logicismul fundat de Frege şi dezvoltat de Russell şi Whitehead a avut ca obiectiv major *reducerea matematicii la logică.* Teza centrală a logicismului – matematica este o ramură a logicii – are două aspecte fundamentale: a) definirea conceptelor matematice pe baza conceptelor logice, sau în formularea lui A. Church [1], „vocabularul matematic este parte a vocabularului logic" şi b) toate asumpțiile matematice (axiome, postulate etc.) să fie derivate din principii sau legi pur logice.

În ceea ce priveşte punctul a), se poate aprecia, după Church, că, într-un anumit sens, cercetările fundaționale au sugerat realizabilitatea lui. Într-adevăr, examinarea vocabularului matematic a evidențiat că unii termeni aparțin logicii, iar ceilalți pot fi definiți cu ajutorul unor combinații adecvate de termeni logici. Şi întrucât semnificația termenilor şi enunțurilor matematice este controlată prin corespondență cu semnificațiile termenilor logici, în timp ce conversa nu are loc, Church crede că avem probată aserțiunea: „logica este anterioară matematicii" [1, p. 405]. Admiterea valabilității primei teze logiciste şi infirmarea celei de-a doua de către evoluția cercetărilor fundaționale au condus la formularea unei variante a logicismului numită „*logicism moderat*", succesele în generalizarea *numărului natural* ca număr întreg, număr rațional, număr complex, ca şi generalizările succesive ale *funcției numerice*, confirmând *definibilitatea* noțiunilor matematice în limbajul teoriei numerelor naturale. Ar urma reducerea teoriei numerelor la teoria mulțimilor şi aceasta la logică. Esența problemei rezidă în *elucidarea* naturii *conceptului de mulțime*, foarte controversat în literatura de specialitate: după unii, este concept intrinsec logicii, în timp ce după alții, nu există suficiente motive pentru o atare susținere. E. J. Lemmon [1] face distincție între clasă şi mulțime, şi nu numai el; o abordare extensivă este prezentă în Quine [4]. Oricum, o decizie asupra *statutului logic* al conceptului de mulțime ar înclina controversa dintre logicism şi intuiționism în *favoarea logicismului*.

Argumentele-obiecții împotriva *logicismului moderat* vizează următoarele aspecte: a) sistemele logice ale calculului propozițional şi calculul predicatelor conțin şi o parte nespecific logică, ce aparține teoriei mulțimilor, atunci când se definesc în termenii teoriei numărului unele concepte matematice mai puțin elementare; b) enunțarea listelor care preced construcția sistemelor logice nu este dată în limbajul-obiect, ci în metalimbaj, al cărui vocabular nu este parte a vocabularului logic; c) existența unor *axiomatizări incompatibile* ale *teoriei abstracte a mulțimilor*, dintre care unele admit un concept de mulțime care îşi este sieşi element; altele îl resping; sau în unele axiomatizări, conceptul de

mulțime a tuturor mulțimilor este prezent, în timp ce în altele nu are sens. Oricum, remarcă H. Mehlberg [1], admiterea conceptului de mulțime ca având statut logic ar transforma logica într-o „disciplină speculativă şi controversată", ceea ce ar afecta caracterul ei fundațional.

H. Mehlberg a propus o nouă variantă de logicism, *logicismul pluralistic* (sintagma „*pluralistic*" fiind tot mai prezentă în cercetările fundaționale, de pildă, la L. Apostel [1]), intenționat ca o *bază comună convergentă* pentru cele trei mari curente rivale: *logicismul, formalismul, intuiționismul*, confirmată de următoarele rezultate metamatematice semnificative (şi aici observăm că aspectul *fundațional* prevalează asupra celui *fundaționist*, fiind decisiv în judecățile ce se emit în spațiul filosofiei matematicii): a) *relații de intertraducere* – care se referă la matematica intuiționistă şi logică, matematica clasică şi logică; b) *concepția semantică a lui A. Tarski despre adevărul matematic*, aspect în care S. C. Kleene a indicat aplicații ale acesteia la matematica intuiționistă; c) *teorema de deducție Herbrand-Tarski* (o aplicare a lui „dictum de omni et nullo", teorema făcând trecerea de la *logică* – clasa legilor logic demonstrabile la *matematică* – clasa teoremelor demonstrabile într-o teorie particulară); d) conceptul intuiționist de constructibilitate, central în intuiționism, enunțat de Heyting [1]: „Exigența că numai obiectele constructibile pot fi menționate este suficientă să explice particularitățile intuiționismului..."; „Printr-o teorie constructivă înțeleg o teorie în care un obiect este considerat numai după ce a fost construit. Cu alte acuvinte, într-o teorie constructivă nu se menționează alte obiecte decât cele constructibile". Ambiguitatea conceptului de constructibilitate, în absența unei distincții explicite între *construcție actual posibilă* şi *construcție (efectivă)*, este răspunzătoare de dificultăți cu care se confruntă *intuiționismul*, dificultăți ce ar putea fi depăşite prin toleranță, valorificată prin înlocuirea acestui curent (drastic, intransigent şi intolerant) cu o *varietate a logicismului pluralistic*.

Sub inspirația unor idei datorate lui H. Mehlberg [1] am notat într-un studiu al nostru (Țurlea [3, p. 44]): „Logicismul pluralistic nu privilegiază nici o logică, indiferent că este vorba de logica „*Principiei*

Mathematica", logica lui J. von Neumann sau logica modală etc., şi în aceată privinţă, există unele similitudini între acest curent şi principiul toleranţei; *logicismul pluralistic* aderă la punctul de vedere realist, în timp ce principiul toleranţei are implicit o atitudine nominalistă. Logicismul pluralistic nu consideră conceptul de mulţime ca fiind concept logic; caracteristica esenţială a logicismului pluralistic este postularea logicii ca instrumentul unic în demonstraţii şi declararea intuiţiei extralogice ca superfluă". Şi tot în acest context, în cartea noastră (M. Ţurlea [1, p. 241]) scriam: „Complementaritatea *programelor fundaţioniste* este relevată *doctrinar* în ceea ce se numeşte *logicism pluralistic* şi care este apt să surprindă mai adecvat profilul epistemologic impus de noul spirit ştiinţific în cunoaşterea matematică; dar este relevată şi de tendinţa de cooperare şi convergenţă, şi chiar de unificare, a rezultatelor impuse de *tehnicile fundaţionale* ale acestor programe..."; iar Kleene [1] scrie: „metodele metamatematice se aplică, în prezent, la studiul sistematizărilor matematicii care apar în şcoala logicistă şi în cea intuiţionistă... reciproc, metamatematica datorează multe elemente legate de apariţia ei cercetărilor logiciste şi intuiţioniste".

Marile programe-curente fundaţioniste (logicismul, formalismul, intuiţionismul) şi-au derulat activitatea sub „*cupola*" *euclidianismului matematic*, inextricabil conexat unei autentice istorii a „detronărilor" *surselor intuitive* ale cunoaşterii matematice, ca şi *justificării axiomelor aritmeticii* şi *geometriei.* Se ştie că descoperirea numerelor iraţionale a condus la „*abandonarea*" *intuiţiei aritmetice pitagoreice* în favoarea celei geometrice. O *geometrie „clară ca cristalul*" a devenit *teoria fundamentală* (având ca teorie pivot – *teoria proporţiilor*) în care urma să fie „tradusă" această *aritmetică recalcitrantă „iraţională*", dar în secolul al XIX-lea clarificarea statutului numerelor iraţionale a reabilitat intuiţia aritmetică. Ulterior am asistat la competiţia dintre *intuiţiile set-teoretică* (Cantor), *logică* (Russell), „*globală*" (Hilbert) şi *constructivistă* (Brouwer). Nu mai insistăm aici asupra *mutaţiilor* înregistrate de concepţia despre *intuiţia set teoretică* şi, corespunzător, despre *realitatea matematică*, „impactul" venind dinspre unele rezultate

metamatematice remarcabile: demonstrația de *independență* (sau rezultatul de independență stabilit de P. Cohen, analogii cu demonstrația și independența postulatului paralelelor), teorema Löwenheim-Skolem etc.

Desigur, *intuiția logică* în cadrul programului euclidian împărtășit de logicişti devenea *sursa* autentică a *rigorii logice*, sursă și garanție a *certitudinii* axiomelor, dar și a transmiterii *adevărului.*

Ciudat și consternant a fost că însuși Russell și-a pierdut încrederea în caracterul evident al euclidianismului și a fost nevoit, „*împins*" de statutul *axiomei reducerii*, să opteze pentru un anumit sort de *inductivism*, care a afectat *acurateța* logicismului pe care l-a îmbrățișat și profesat cu atâta, poate, candoare. El a admis că unele axiome, ca și cea a reducerii, pot fi acceptate și justificate inductiv, adică în virtutea evidenței lor inductiv derivate din consecințele valide produse de raționamente. Dacă matematica este organizată ca un sistem deductiv, atunci când noi credem în matematica pură, lucrul acesta nu este datorat exclusiv adevărului premiselor, unele dintre acestea pot fi, chiar mai mult sau mai puțin evidente decât consecințele lor (aproape că Russell formulează ideea că propozițiile care sunt cele mai evidente „nu sunt logic cele mai evidente", un fenomen mai pregnant în științele empirice). În domeniul logicii pure, se întâmplă, observă Russell, ca primele principii logic pure, cel puțin unele dintre ele să fie admise nu pe propria lor socoteală, ci a consecințelor lor. Așadar, motivele noastre pentru care avem încredere în *logică* (și în matematica pură) sunt în parte inductive și probabile, în ciuda faptului că în *ordine logică*, propozițiile logicii și matematicii pure sunt deduse din premisele logicii prin deducție pură. Russell marchează, în acest context, o distincție importantă care surmontează confuzii și dificultăți: chestiunea *epistemologică* și chestiunea *logică.* Și, paradoxal, observăm un *fenomen straniu*, acela cum logicienii matematici (în primul rând logiciștii) „*obsedați*" de *rigoare* și *certitudine* absolută ajung la *inductivism*; ceva, desigur, ce nu a fost intenționat în demersul lor inițial. Și A. Fraenkel (1929) nota că unele axiome își primesc „full weight" din evidența consecințelor lor. Rosser (1953) observa că termenul de „*axiomă*" folosit de Euclid desemna un „*adevăr auto-evident*", în timp

ce astăzi axiomele formează o mulțime de enunțuri care, împreună cu regula *modus ponens*, constituie o bază suficientă ca să derivăm toate enunțurile, pe care dorim să le deducem. Problema legitimă este care sunt acele enunțuri pe care vrem să le derivăm? Sunt ele autoevident adevărate?, caz în care constatăm că Rosser plasează discuția *problemei autoevidenței de la nivelul axiomelor la cel al enunțurilor ce dorim să le derivăm*. Dar, acest mod de „*postulare*" în care sunt axiomatizate mulțimi de enunțuri arbitrare, indiferent de adevărul sau/şi falsitatea lor, se învederează ca irelevant privind atât *adevărul*, cât şi *transmiterea* lui, iar caracterul lui dezagreabil l-a împins întru disperare (pe Russell) spre inductivism; dezorientat de confuzii, el pare a nu mai avea speranța găsirii *splendidei certitudini* ce-i animase idealul *deductivist* şi *logicist*, văzându-se nevoit să renunțe la *euclidianism ca paradigmă a rigorii*, a *certitudinii* şi *adevărului* în peisajul dezolant al unei matematici recalcitrante, acestea fiind de neatins nicăieri; un *scepticism* izvorât din neîmplinirea unui ideal care vedea matematica ca *paradigmă* a cunoaşterii umane; *logica poate doar să explice matematica, nu şi s-o demonstreze*, un *eşec al justificării* certitudinii matematice. Deşi Hempel (1945) a considerat că propozițiile matematicii au o certitudine nechestionabilă, asemenea propozițiilor de genul „toți celibatarii sunt necăsătoriți", scepticii au acuzat matematica că nu oferă cunoaştere autentică, ci numai „*sofisticărie*". *Intuiționismul* reprezintă în filosofia matematicii o ramură a *scepticilor distructivi* care au speculat dificultățile logiciştilor. După Weyl (1949) „*Principia Mathematica*" fundează matematica nu pe logica singură, ci pe un fel de *paradis al logicianului* care *crede într-o lume transcendentală*. Intuiționiştii acuză logica russelliană pe considerentul că ea are un *caracter contra-intuitiv*. Relația dintre logicism şi intuiționism (de fapt şi formalism) a cunoscut o evoluție de la 1931 (Congresul de la Königsberg), unde logicismul a fost reprezentat de R. Carnap [1], formalismul a fost reprezentat de J. von Neumann [1], iar intuiționismul a fost reprezentat de Heyting [2] şi până astăzi. Dacă tonul competitiv şi polemic era semnificativ pentru rivalitatea acestor curente în 1931, deja la al doilea Congres – 1960, Stanford, California – s-a

putut constata, cu stupoare, că acest ton devenise moderat. Heyting [3] spunea în 1960: „Aş vrea să compar situaţia din 1930 cu cea de astăzi. Spiritul *cooperării* (subl. ns.) paşnice a învins controversele implacabile. Nici o direcţie de cercetare nu mai are pretenţia să reprezinte unica matematică adevărată".

Evoluţiile recente din sfera cercetărilor fundaţionale au constrâns aceste curente (logicismul, formalismul, intuiţionismul) la «*mutaţii de tranziţie*» de la aspectul lor *doctrinar-filosofic* la cel *metateoretic*, în speţă *meta-matematic*; constatăm proeminenţa şi preeminenta aspectului „*fundaţional*" şi o „*disoluţie*" a celui „*fundaţionist*", primul fiind un element mai profund racordat la ce face „*working mathematician*", mai relevant pentru *practica matematică* şi *meta-matematică*. Referitor la „*elementul-ingredient*" doctrinar filosofic al acestor programe fundaţioniste (curente în filosofia matematicii), observăm că logicismul a devenit pe rând „*moderat*", apoi „*pluralistic*" şi o metamorfoză similară au parcurs şi celelalte două curente (rivale), programul lui Hilbert din formalism a devenit „*programul modificat*" în versiunea Gentzen, ca mai recent, după 1964 (vezi şi Robinson [3]), să exceleze printr-o abundenţă de investigaţii şi rezultate metamatematice, între care un loc de seamă deţin cele descoperite şi/sau stabilite de P. Cohen [1]; în cazul intuiţionismului s-au constituit cunoscutele direcţii constructiviste reprezentate cu prestigiu de A. A. Marcov, P: Lorenzen, ca şi conceptualismul constructiv elaborat de Hao Wang, orientări în care se statuează explicit părăsirea unor premise intuiţioniste (brouweriene) ca cele ce vizează ontologia subiectivistă: metalismul şi idealismul subiectiv.

Orientarea, în maniera *marcat fundaţională* şi deci *nefundaţionistă,* a intuiţionişti1or spre cercetările metamatematice efective a gravitat, din punct de vedere filosofic, în jurul conceptului fundamental de *intuiţie.* Astfel, Lawrence Pozgany [1] propune ceea ce el numeşte *intuiţionism liberal* ca o bază pentru teoria mulţimilor, al cărui nucleu este aserţiunea fundamentală de a privi *mulţimile* ca *ficţiuni mentale*, *construcţe*; intuiţionismul liberal se distinge de cel obişnuit, prin aceea că permite *construcţia mulţimilor actual infinite de cardinalitate arbitrar de înaltă*

(mare). În examinarea intuiționismului liberal disociem două principii: *Principiul A* care conservă sui generis *aspectul intuiționist* formulat astfel: o mulțime este un *construct mental* care rezultă din operația mentală de a gândi o colecție de obiecte care au fost anterior *descoperite* sau *construite* şi apoi privind întreaga colecție de obiecte ca un *singur obiect nou*, numit „*mulțimea*" obiectelor date. *Principiul B* care marchează *aspectul liberal*: Orice proces mental bine definit pentru construirea mulțimilor care a fost *envisioned* fără ambiguități sau contradicții, poate fi privit ca deja complet, indiferent de orice dificultăți pur practice care pot preveni pe cineva de a-l executa actual. Comentariul principiului formulat de Lawrence Pozgany ne explicitează enunțarea unei definiții a unei mulțimi foarte apropiată de noțiunea de mulțime a lui G. Cantor [1]. Autorul insistă asupra remarcii că obiectele, care sunt „colectate" într-un întreg (în vederea formării unei mulțimi), *trebuie* (neapărat) să fie date *anterior* construcției mulțimii în cauză. Prin urmare, nu este plasată nici o *restricție* cu privire la *obiectele* ce vor forma o mulțime, ci se formulează doar condiția ca ele să ne fie date anterior acesteia. De altfel, ni se pare că această idee a autorului este consonantă cu concepții ale lui Cantor expuse în scrisori către Dedekind şi anume, că nu orice colecții se pot constitui ca o singură totalitate (a single totality), pe acestea el numindu-le *colecții absolut infinite* sau *inconsistente*; deci, Cantor a negat că orice colecție de obiecte date se constituie ca o mulțime. Pe aceeaşi linie de gândire este consemnată distincția *colecții* şi *mulțimi* formulată de T. Skolem [1].

Examinarea principiului (A) mai comportă următoarele trei clarificări:

A_1. Orice colecție oarecare de obiecte anterior date prin descoperire sau construcție poate fi considerată ca formând o singură totalitate sau mulțime.

A_2. Dacă S este orice mulțime şi x este un membru al lui S, atunci x trebuie să fie dat anterior construcției lui S.

Obiectele furnizate, date prin *descoperire*, mai curând decât prin *construcție*, sunt numite, în mod uzual, *individuali.* Edificarea teoriei

mulțimilor este un proces mental care se face pas cu pas, începând cu anumiți individuali şi continuând cu formarea mulțimilor de aceşti individuali, apoi de mulțimi care conțin posibil individuali şi mulțimi ş.a.m.d.

A_3. Orice mulțime S este distinctă de toate obiectele x care sunt, în mod esențial, în S.

Acum, este evidentă *relevanța principiului* asumat de *intuiționismul liberal* referitor la *paradoxuri*, să spunem că vorbim de cel al lui Cantor, bazat pe conceptul de *mulțimea M a tuturor mulțumilor*; deoarece această noțiune nu este legitimă, construcția respectivei mulțimi M nu este autorizată. Într-adevăr, pentru a construi mulțimea M noi trebuie să presupunem că toate mulțimile, *inclusiv M*, au fost deja construite, o contradicție cu presupozițiile cerute în construirea lui M. Hao Wang [1] a vorbit de aspectul *genetic* al noțiunii de mulțime a lui Cantor. Paradoxul lui Cantor emerge direct dintr-o *atitudine ontologică platonistă,* care asumă că toate mulțimile sunt „*date*", „*există*" prin ele însele şi ne aşteaptă să le examinăm. Asemănător, deoarece *nici o mulțime nu poate să fie propriul ei membru* (membru al ei însăşi) eşuăm în încercarea de a construi *mulțimea tuturor mulțimilor care nu sunt membri ale lor însele*; trebuie o altă încercare ca să construim o mulțime a tututor mulțimilor, deci, cade şi paradoxul lui Russell odată cu cel al lui Cantor.

Intuiționismul liberal se dovedeşte fructuos în expunerea tuturor axiomelor sistemului Zermelo-Fraenkel, a legii terțiului exclus, a paradoxului lui Skolem, ca şi a ipotezei conținutului etc.

5.6. PROGRAMUL FORMALIST HILBERTIAN. FORMALISMUL HILBERTIAN

Programul formalist hilbertian a situat în centrul analizei filosofice conceptul de *limbaj matematic* şi, ca *program metateoretic* s-a constituit ca „*metamatematică*" sau „*teoria demonstrației*". Hilbert, întemeietorul formalismului, a intenționat ca prin metamatematică să ofere o *fundare*

a matematicii clasice, sperând astfel să salveze „programul euclidian" (al fundării matematice) de scepticismul dezolant care se configura sub influența paradoxelor în matematică; în acest sens, se poate spune că scopul formaliştilor a fost identic cu cel al logiciştilor.

Într-adevăr, Hilbert afirma expres că nu trebuie să ne lăsăm izgoniți de nimeni şi de nimic din „*paradisul*" creat de G. Cantor. Unde este de sperat să găsim certitudinea, dacă nu în matematică, această *paradigmă* recunoscută a *devărului* şi *certitudinii*? Iată că şi aici formațiile conceptuale şi inferențele dovedite legitime până acum, conduc la absurdități. Situația creată în matematică prin apariția *paradoxurilor*, dacă nu descuraja, oricum, provoca.

Plecând de la prestigiul şi eficiența axiomaticii formale la care constribuiseră atâtea nume celebre în epocă, precum Frege, Peano, Russell etc., Hilbert îşi formulează ideile sale, care vor constitui nucleul metamatematicii sale, programul metateoretic poate cel mai fecund lansat de marile programe fundaționiste: *logicism, formalism, intuiționism.* Hilbert va pleca de la o situație remacabilă în epocă, cea a „*aritmetizării matematicii*", şi în context va formula următoarele idei: 1) axiomatizarea şi expunerea matematicii clasice în cadrul unui limbaj formal, reprezentarea ei sub forma unui calcul; 2) toate adevărurile aritmetice (şi, deci, *via* aritmetizare, toate sorturile de adevăr matematic) pot fi formal demonstrate; 3) toate propozițiile aritmetice care sunt formal demonstrate (teoremele aritmeticii) vor fi cert adevărate dacă sistemul formal este consistent, adică nu se întâmplă ca atât A cât şi Ā să fie ambele teoreme; 4) metamatematica urmează să asigure demonstrația consistenței şi completitudinii sistemelor formale prin cercetări asupra calculelor. În scopul evitării oricărei circularități, demonstrația non-contradicției (consistenței) se va conforma unor *exigențe „tari"* de constructivitate, adică va fi elaborată în „*cadrul punctului de vedere finitist*" (matematica fiind, în concepția lui Hilbert, o „teorie unitară" care conține numai termeni perfect de bine cunoscuți şi inferențe trivial corecte). La această exigență s-a referit şi Ramsey [1, p. 63] când afirma că principiile folosite în demonstrația matematică şi axiomele matematicii

nu conduc la contradicții. În același sens, J. von Neumann [2] caracterizează argumentul matematic ca „o înlănțuire de inferențe intuitive autoevidente", iar Hilbert conchidea că adevărul matematic și, care urmare a aritmetizării, toate adevărurile matematice vor fi întemeiate pe o intuiție „globală", devenind adevăr absolut.

Obiectivul programului hilbertian era justificarea certitudinii cunoașterii matematice, „de a stabili o dată pentru totdeauna certitudinea metodelor ei" (Hilbert), de a funda acest „model de certitudine și adevăr". Căci convingerea lui Hilbert era că paradoxele din teoria mulțimilor sunt generate de folosirea abuzivă a unor metode demne de încredere, și nu de natura matematicii. Numai prin separarea utilizării corecte de cea abuzivă se poate salva matematica de paradoxe și se poate asigura certitudinea ei.

Programul lui Hilbert formula între cerințele semnificative următoarele: 1) păstrarea intectă a matematicii clasice, inclusiv „*paradisul cantorian*", adică teoria mulțimilor creată de acest matematician celebru, care a contribuit cel mai mult la crearea noii paradigme a matematicii de la sfârșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea („vom depista cu atenție, vom cultiva, vom întări și vom face utilizabile definițiile și căile de raționament fecunde, chiar acolo unde se oferă cea mai slabă perspectivă. Din paradisul pe care ni l-a creat Cantor numeni nu ne va alunga") (Hilbert [3]); 2) Întemeierea matematicii clasice printr-o demonstrație de consistență care va stabili imposibilitatea apariției paradoxelor și, în consecință, „va produce aceeași certitudine pentru raționament așa cum există în aritmetica elementară, de care nimeni nu se îndoiește și unde contradicțiile și paradoxele apar numai datorită neatenției noastre".

Pentru realizarea acestui obiectiv Hilbert a elaborat, implicit și explicit o *concepție epistemologică* despre *natura matematicii,* obiectul, demersul și valoarea ei, concepție care asuma o bază logică laborios construită. În mod explicit în Hilbert [3] se afirmă că „atingerea acestor țeluri este, evident, posibilă numai dacă reușim să elucidăm complet *natura infinitului*"; după cum se știe conceptul de infinit a fost funda-

mental, dacă nu chiar dominant în gândirea matematicii clasice, pe care vrea s-o apere întemeietorul formalismului de „invazia antinomiilor". Iată de ce Hilbert procedează la un examen atât de atent al conceptului de infinit, căutând să răspundă la întrebarea: Ce sens are acest concept în contextul gândirii matematice? de pe poziția finitismului – exigență expres asumată în metamatematica sa, Hilbert scria: „infinitul nu este nicăieri de găsit în realitate, oricare ar fi experiențele, observațiile la care am apela şi orice ştiință am utiliza..."; „infinitul nu ne-a fost nicidecum dat în realitate, ci doar interpolat sau extrapolat prin intermediul unui proces intelectual", Hilbert [3]. Despre *totalitățile infinite* se poate spune că nu există, sunt *simple ficțiuni* care conferă eleganță construcțiilor noastre matematice şi simplitate raționamentelor noastre asupra mulțimilor finite. Influența lui Kant asupra concepției epistemologice hilbertiene este evidentă: „Operarea cu infinitul nu poate fi asigurată decât prin finit. *Rolul* care-i rămâne infinitului este numai acela al unei *idei* – după Kant vom înțelege printr-o idee un concept al rațiunii care depăşeşte întreaga experiență şi care întregeşte concretul ca totalitate" (Hilbert [3]). Şi, deşi, cum am afirmat, scopul formalismului este identic cu cel al logicismului, urmând pe Kant, Hilbert se desparte de Frege şi Russel configurându-şi într-un mod specific *concepția epistemologică* şi *programul metodologic*, afirmând că şi conținutul real al matematicii „nu depinde de nici un fel de logică şi de aceea... nu poate avea ca fundament numai logica" (Hilbert [3]). *Conținutul matematicii* ne este dat în *reprezentare* (se observă *limbajul kantian împrumutat*!) ca „obiecte extralogice, concrete, care există intuitiv ca trăire efectivă nemijlocită înainte de orice gândire). (ibidem, p. 142). Hilbert consideră că *teza* acestui conținut ireductibil al matematicii este „*atitudinea filosofică fundamentală*" „necesară pentru matematică ca şi în genere pentru orice gândire, comprehensiune şi comunicare ştiințifică, şi fără de care o manifestare spirituală nici măcar nu este posibilă", (Hilbert [3]). Relevante pentru studiul întreprins asupra naturii matematicii şi în vederea fundării ei sunt în concepția hilbertiană „înseşi semnele concrete"... obiectele studiului nostru, a căror formă, ca urmare a atitudinii

noastre, este imediat clară şi se poate recunoaşte" (Hilbert [3]). În acest mod Hilbert a fost condus la o *concepție formalistă* asupra matematicii, după care *obiectul matematic*, conținutul ei ireductibil este constituit din configurațiile finite de semne concrete şi reprezintă, în terminologia lui, *domeniul „real"* al acestei ştiințe. Acest domeniu este întregit în matematica clasică prin adăugarea aşa-numitului domeniu „*ideal*" al matematicii, *structuri ideale*", ca elementele ideale din algebra (de ex. $\sqrt{-1}$), şi care asigură valabilitatea generală a regulilor şi legilor logicii. Dar, întrucât punctul de vedere filosofic acceptat este cel „*finitist*", Hilbert formulează teza că *existență în matematică* au numai elementele finite, construcțiile conceptuale finite care aparțin *domeniului real* şi dintr-o asemenea perspectivă urmează să fie reinterpretate enunțurile generale şi existențiale din matematică, încât acestea să dobândească o semnificație *finitistă*; evident, vor fi admise numai raționamente finitiste. În acest sens o construcție conceptuală finită este o definiție care se menține „în cadrul reprezentabilității fundamentale a obiectelor ca şi a realizabilității fundamentale a proceselor şi prin aceasta se înfăptuieşte în cadrul modului de considerare concret". (D. Hilbert şi P. Bernays [2]). *Raționamentul finit* este, după Hilbert şi Bernays, „raționamentul concret, direct, realizabil în experimente ideale asupra obiectelor prezente intuitiv şi liber de supoziții axiomatice" (D. Hilbert şi P. Bernays [2]). Asemenea aserțiuni relevante pentru punctul de vedere finitist adoptat în formalism i-au determinat pe H. Scholz [1] şi G. Hasenjaeger să afirme că „acest punct de vedere se manifestă în negarea tuturor supozițiilor sau proceselor de raționare extinse din finit asupra infinitului, şi care nu sunt certificate prin caracterul lor constructiv".

Dar Hilbert a observat că multe din raționamentele şi modurile de construcție conceptuală practicate în matematică, îndeosebi în aritmetică, analiză, teoria mulțimilor nu satisfac exigența finitismului: „în analiză... modalitatea nefinită de formare a conceptelor şi de demonstrație aparține însăşi metodei teoriei" (D. Hilbert, P. Bernays [2]); iar în teoria mulțimilor acest fapt este şi mai evident în urma *introducerii de către Cantor a*

numerelor transfinite. Fascinat de creaţia lui Cantor, Hilbert scria că ea ne-a oferit cea mai adâncă înţelegere a naturii infinitului „constituind" produsul cel mai minunat al spiritului matematic şi în general una din realizările cele mai înalte ale activităţii umane pur raţionale" (Hilbert [3]). Avea, deci, motive profunde când scria că nu trebuie să se renunţe la „*paradisul lui Cantor*", idee consonantă cu una din tezele fundamentale ale programului său, şi anume păstrarea intactă a matematicii clasice. Ajunşi aici trebuie să remarcăm că dificultatea în care s-a aflat întemeietorul formalismului era esenţială şi provocativă: Hilbert vrea, pe de o parte, să salveze întreaga matematică clasică, inclusiv creaţia cantoriană, şi să nu renunţe la folosirea principiilor generale ale logicii, iar, pe de altă parte, anunţase ca *atitudine filosofică fundamentală* punctul de vedere *finitist*, incompatibil cu menţinerea întregii matematici clasice, dar şi cu aplicarea nerestrictivă a principiilor logice. Convins de menirea noţiunilor abstracte -simplificarea şi completarea teoriilor – el vrea să le introducă în matematică şi în acelaşi timp vrea să evite paradoxurile inerente acestui proces. Soluţia problemei, Hilbert o găseşte operând distincţia „*domeniul «real» şi domeniul «ideal»*" al matematicii şi generalizând metoda elementelor ideale inspirată chiar de experienţa matematică. Numai enunţurile *finite*, aparţin părţii reale a matematicii, posedă semnificaţie, în timp ce, enunţurile *ideale* au numai un rol operaţional (întregesc formalismul dar nu extind *ontologia* teoriei matematice respective). Rolul operaţional al elementelor ideale rezidă în menţinerea „regulilor simple formale ale logicii aristotelice obişnuite", deoarece „enunţurile ideale şi anume formulele, în măsura în care ele nu exprimă afirmaţii finite, nu semnifică nimic, operaţiile logice nu pot fi aplicate faţă de ele concret ca în cazul propoziţiilor finite. Este, deci, necesar să formalizăm operaţiile logice şi chiar demonstraţiile matematice". (D. Hilbert [4]). Formalizarea teoriilor matematice, reprezentarea lor sub forma unor calcule, este premisa fundamentală a elaborării *demonstraţiei de consistenţă* a matematicii clasice – *idealul major al metamatematicii sale.*

Din constatarea lui Hilbert că „existenţa unor domenii infinite de indivizi" nu poate fi legitimată prin apel la experienţă sau la o realitate

în sine, aşadar nu poate fi justificată direct, urmează că admiterea lor în matematică cere o demonstraţie de noncontradicţie a unui sistem de axiome care să caracterizeze asemenea entităţi. *Noncontradicţia* devine în concepţia lui Hilbert *criteriul fundamental* al admiterii entităţilor matematice, punct de vedere generalizat cu privire la întreaga cunoaştere ştiinţifică. *Construcţiile conceptuale idealizate, provenite din* extrapolarea unui anumit domeniu de experienţă, şi care permit o reprezentare simplificatoare a realităţii, trebuie să satisfacă condiţiile: a) o corespondenţă aproximativă cu realitatea; şi b) extrapolarea înfăptuită prin ele să fie noncontradictorie. D. Hilbert, P. Bernays [2, p. 2] scriu în această privinţă: „idealizările întreprinse în teorie, adică extrapolarea prin care construcţiile conceptuale şi principiile teoriei depăşesc domeniul fie al evidenţei intuitive, fie al datelor de observaţie, vor fi recunoscute ca lipsite de contradicţii... Suntem astfel nevoiţi să cercetăm noncontradicţia sistemelor teoretice independent de considerarea stărilor factuale, şi prin aceasta noi ne aflăm deja pe *punctul de vedere al axiomaticii formale*" (subl. ns.).

Aşadar, vrând să justifice matematica clasică, Hilbert este preocupat să ofere o demonstraţie a *consistenţei absolute* a acesteia, adică o demonstraţie directă, înăuntrul sistemului formal. Reamintim că acest *sistem formal* care să „*captureze*" întreaga matematică avea un caracter *sui generis*, căci considerând, cum am văzut, că logica nu poate construi un fundament pentru matematică, întemeietorul formalismului a propus *edificarea formală simultană a logicii şi matematicii.* Demonstraţia absolută de consistenţă urma să aibă un *caracter intern sintactic* şi deci *matematic*, o modalitate relevantă pentru celebrul enunţ hilbertian „*să mutăm odată pentru totdeauna fundamentele matematicii înăuntrul matematicii*"; este ceea ce s-a numit *separarea fundamentelor de epistemologie*. S-a vorbit în acest sens de faptul că în *problema fundamentării*, el a oferit un gen de *fundamente sintactice,* numite de unii autori „*combinatoriale*", ceea ce este sugestiv pentru natura argumentelor matematice, idee reţinută şi în formularea, anterior citată, a unui discipol remarcabil al lui Hilbert, este vorba de John von Neumann.

Nucleul metamatematicii hilbertiene a constat în următoarea idee: (A) Fie un sistem S consistent. Dacă S este extins conservativ şi necreativ în S_1, atunci S_1 va fi de asemeni un sistem consistent. (Asupra ideilor care urmează, vezi şi I. Pârvu [2, p. 230–231]). În legătură cu această teză centrală se pot formula 2 observaţii, una de ordin *logic*, iar alta de ordin *metodologic*. Ideea logică corectă ar fi nu (A) ci (B): Dacă un sistem matematic S consistent şi complet va fi extins conservativ şi necreativ, atunci şi extensia sa S_1 de acest tip va fi de asemenea consistentă. Observaţia a doua se referă la cerinţa de natură *operaţionalistă:* un sistem matematic întregit cu structuri ideale este utilizabil dacă şi numai dacă orice demonstraţie a unei teoreme care are un corelat finit al matematicii finite poate fi transformată într-o *demonstraţie în care nu sunt folosite elemente ideale*; altfel spus, *propoziţiile ideale nu generează, în mod independent, teoreme aparţinând părţii finite a matematicii,* rezultă că în urma unei asemenea demonstraţii, propoziţiile ideale pot fi eliminate. Urmează că în terminologia lui Quine [1] caracterul necreator şi conservativ al extinderii domeniului real al matematicii cu propoziţii ideale generează „*inocenţa esenţială*" a conceptelor teoretice, invederând faptul că ele sunt ştiinţific dispensabile, având statutul de abstracţii fără corespondent în existenţa matematică.

Acordând un asemenea statut propoziţiilor ideale, Hilbert adoptă o variantă a *instrumentalismului*: propoziţiile şi conceptele teoretice au numai un *rol operaţional*, asigurând o simplificare (eventual o eleganţă) a raţionamentelor noastre efectuate asupra obiectelor finite, fondatorul formalismului chiar explicit corelează atitudinea sa filosofică cu instrumentalismul fizic. Amintim că instrumentalismul şi nominalismul lui Hilbert au o natură specifică, căci, de exemplu, în ceea ce priveşte atitudinea lui nominalistă există o diferenţă faţă de poziţia unor nominalişti ca N. Goodman, L. Henkin etc., deoarece el nu a cerut, ca aceştia, *eliminarea idealizărilor* din toate contextele la nivelul enunţurilor, nu a cerut eliminarea tuturor propoziţiilor ideale şi a conceptelor ideale luate individual prin traduceri şi definiţii explicite în propoziţii, respectiv concepte reale" (cf. I. Pârvu [2, p. 231]; exigenţa hilbertiană are în vedere contextul global, cf. S. C. Kleene [1].

Programul lui Hilbert a fost centrat pe demonstrația *directă* sau, *absolută* („*sintactică*") a *consistenței* și *completitudinii*. Teoremele lui Gödel au infirmat obiectivul formalismului hilbertian. *Teorema de incompletitudine* a lui Gödel poate fi enunțată astfel: dacă un sistem de axiome este noncontradictoriu, atunci se poate construi un enunț adevărat al aritmeticii elementare, cu proprietatea că nu este nici demonstrabil și nici refutabil în sistemul axiomatic respectiv. Altfel spus, acest rezultat stabilește că este *imposibilă* chiar o *axiometrizare completă a aritmeticii*. *Teorema a doua a lui Gödel*: dacă un sistem este clasic necontradictoriu, atunci necontradicția acestui sistem nu se poate demonstra cu metodele interne ale sistemului. A rezultat că deoarece și metodele finite aparțin metodelor formalizabile în sistemul formal, obiectivul formalist nu este realizabil, adică nu este asigurată demonstrația consistenței matematicii clasice prin metode finite. Gödel însuși a afirmat că o demonstrație de consistență finită (adică intuiționist ireproșabilă) pe care o caută formaliștii este imposibilă în general.

Consecințele teoremelor gödeliene trebuie analizate în plan *filosofic* și în plan *metodologic*. *Din punct de vedere filosofic, formalismul* este *o concepție nominalistă* și *instrumentalistă*. Eșecul formalismului, datorat rezultatelor gödeliene, a învederat incapacitatea epistemologică și metodologică a nominalismului de a explica adecvat natura cunoașterii matematice, reducând-o la *limbaj*, reducând esența matematicii sau/și a metamatematicii la un ansamblu de considerații sintactice sau intern matematice. Problematica filosofică a matematicii nu poate fi redusă la aceste aspecte și ea nu poate fi rezolvată exclusiv cu instrumentația logic formală a metamatematicii. I. Pârvu [2, p. 232] observa că fraza lui Kripke [1, p. 461] „*nu există un substitut matematic pentru filosofie*" ar putea fi invocată în evaluarea globală a formalismului, pentru stabilirea valorii și limitelor cercetării pur și intern matematice a particularităților și fundamentelor cunoașterii matematice. În continuarea acestui gând merită evocat un pasaj concludent pentru problema în discuție, aparținând lui E. Brieskorn [1, p. 228–229]: „ele (programele fundaționiste) au încercat să rezolve problema *semnificației* propozițiilor matematice intern

matematic sau pe *o bază filosofică insuficientă*, fără a raporta matematica la acțiunea umană, la practică. Ca urmare, însăşi practica matematică internă a fost de ambele orientări prescurtată şi deformată".

Dacă *intențiile fundaționiste ale formalismului* n-au fost realizate, în plan metodologic se poate vorbi de o fertilitate remarcabilă a metamatematicii. În primul rând trebuie reținută contribuția şcolii de metamatematică a lui Hilbert la: 1) studiul eficace al *aspectelor constructive* ale sistemelor axiomatice, fapt în atenția unor autori ca G. Kreisel [1]; 2) studiul fundamentelor matematicii, domeniu în care, remarca autorul citat, formalismul a impus „o tehnică matematică riguroasă pentru cercetarea bogatei varietăți a *problemelor fundării matematicii şi logicii*", studiu care abundă în probleme dar şi rezultate; şi, poate, faptul cel mai semnificativ îl constituie chiar teoremele gödeliene care au fost reabordate recent din perspectivă *constructivist-fundațională* de W. S. Hatcher [1], Hao Wang [1] şi la care ne vom referi în continuare, dar nu înainte de a menționa unele contribuții majore la şi în tradiția formalismului, ne gândim în primul rând la Gentzen.

5.7. GENTZEN ŞI PROGRAMUL LUI HILBERT

Gentzen revine în 1936 la programul lui Hilbert consacrându-şi eforturile cercetărilor metamatematice. Principala lui contribuție în această privință este ideea că s-ar putea folosi în locul *procedurii originale hilbertiene o formă restricționată de inducție transfinită*, care, deşi *nu este formalizabilă* în *teoria numerelor*, este, totuşi, consonantă cu principii de demonstrație admise din punct de vedere finitist. „O demonstrație de consistență" – scrie Gentzen [1, p. 23] – „este o demonstrație matematică în care anumite inferențe şi concepte derivate trebuie să fie derivate; lipsa lor de contradicție trebuie deja să fie presupusă. Nu se poate să fie o demonstrație *absolută de consistență*. O demonstrație de consistență reduce corectitudinea anumitor forme de inferență la corectitudinea altor forme de inferență. Este deci clar că într-o

demonstrație de consistență noi putem folosi numai forme de inferență pe care le apreciem considerabil mai sigure decât formele de inferență ale teoriei a cărei consistență este să fie demonstrată".

Atitudinea lui Gentzen o vedem confirmată în *atitudinea explicită a formaliștilor*: „Examinarea noastră a începuturilor teoriei numerelor şi algebrei a servit scopul elucidării raționamentului neformal în aplicația şi uzul lui direct, liber de asumpții axiomatice, cum este purtat în experimente mentale în termenii obiectelor intuitiv concepute. Acest fel de raționament noi îl vom numi, în scopul de a avea o expresie concisă pentru el, *raționament finitist*, şi de asemenea vom desemna ca *atitudine finitistă*, sau *punct de vedere finitist, atitudinea metodologică* care întemeiază acest raționament. În acelaşi sens noi vom vorbi de concepte şi aserțiuni specifice «*finitist*», exprimând cu cuvântul «finitist» în fiecare caz faptul că deliberarea, aserțiunea sau definiția procedează înăuntrul limitelor conceptibilității în principiu a obiectelor ca şi a realizabilității în principiu a proceselor şi astfel acestea au loc în interiorul domeniului considerațiilor concrete" (Hilbert, Bernays [2]). Tot ceea ce a spus Gentzen despre *tehnicile sale de demonstrație* este că sunt în acord cu intențiile finitiste.

Inducția transfinită restricționată a lui Genzen a provocat multe comentarii şi atitudini. De pildă, aceasta este o metodă finitară în funcție de interpretarea ei. Black scrie că este îndreptățită explicația lui Bernays, după care „insuccesul anterior al programului formalist este datorat restricțiilor excesive asupra modurilor permisibile de cercetare". În esență, acest comentariu al lui Black ne spune că *inducția transfinită restricționată* a lui Gentzen este *elementară* şi *intuitivă* deşi nu este strict finitistă. Comparând metodele finitare cu cele intuiționiste, Gentzen a spus despre primele că sunt mai restrictive, fapt ce l-a determinat să ofere o demonstrație de consistență, în sens intuiționist, afirmând chiar că *intuiționismului lui Brouwer este compatibil cu uzuri mai liberale* ale formelor conceptului de *infinit*.

Referindu-se la relația existentă între demonstrațiile de consistență şi regula inducției tranfinite restricționate, Gentzen scrie: „în demonstrația mea, «demonstrațiile» de teoria numerelor, a căror consistență este să fie demonstrată, sunt angajate într-o secvență care urmează din

consistența «demonstrațiilor» care o precede. Această secvență (şir) poate fi pusă într-o corespondență biunivocă cu numerele ordinale transfinite până la ε_o. Este din acest motiv că şi consistența tuturor «demonstrațiilor» urmează dintr-o inducție transfinită până la ε_o".

Analizând *structura numerelor ordinale până la* ε_o, Gentzen a conchis asupra naturii lor constructive, ca şi asupra tipului de inducție restricționată practicată de el, afirmând că este în acord cu punctul de vedere finitist. El spera, chiar, că o extensiune a inducției transfinite, peste un *segment* mai mare *al clasei a doua de numere* a lui G. Cantor, ar face posibilă o demonstrație a analizei, dar moartea sa tragică survenită în 1945 a lăsat în proiect toate acestea, însă Ackermann, Fitch, Lorenzen, Schütte, Takeuti l-au continuat.

În ceea ce priveşte *incompletitudinea sistemelor formale,* Gentzen a afirmat că deşi este un fenomen interesant nu este totuşi alarmant. Nu se poate spune că pentru *teoria numerelor* se poate specifica odată pentru totdeauna un sistem suficient de forme de inferență, deoarece pentru teoreme noi sunt cerute forme noi de inferență, ceea ce nu se poate anticipa dintr-un început. Deşi teoremele lui Gödel despre incompletitudine au indicat o slăbiciune a metodei axiomatice, Gentzen a văzut în acest fenomen doar un *obstacol minor* în investigațiile metamatematice „*minimizat*" prin „*procedura lui de reducție*".

Evaluând global contribuția lui Gentzen suntem obligați să operăm distincția dintre metode *finitiste* şi metode *constructive.* Gentzen a afirmat despre inducția sa restricționată că deşi nu este în acorddeplin cu finitismul este totuşi constructivă, iar metodele intuiționiste şi finitare sunt în fapt cazuri, variante ale punctului de vedere constructiv în matematică.

5.8. PROGRAMUL LUI HILBERT ŞI SEMNIFICAȚIA TEOREMELOR LUI GÖDEL

Se consideră un sistem de ordinul întâi, F, (sau de ordin mai înalt în care egalitatea este definibilă) suficient de bogat, dacă cel puțin aritmetica de ordinul întâi poate fi expusă în cadrul lui.

Rezultatele stabilite de Gödel sunt următoarele: (1) Dacă cerem ca mulțimea axiomelor proprii ale unui sistem să fie o mulțime decidabilă (să decidem prin mijloace pur constructive dacă o formulă bine (corect) formată este sau nu o axiomă), atunci nu există un mod de a construi un sistem formal de ordinul întâi sau de ordin mai înalt în care *toate enunțurile adevărate* ale matematicii, exprimabile în interiorul sistemului, *să fie demonstrabile* ca teoremele.

(2) Consistența unui sistem F de ordinul întâi, suficient de bogat, nu poate fi demonstrată prin metode care pot fi exprimate în F. În particular, dacă S este consistent, atunci nu putem demonstra consistența lui înăuntrul său; a face acest lucru trebuie să folosim metode care depăşesc sistemul (cf. W. S. Hatcher [1]).

Rezultatul (1) a demonstrat *imposibilitatea formalizării tuturor adevărurilor* matematicii. Atunci este firească întrebarea pe care o pune Hatcher, despre ce fel de consistență se poate vorbi când ştim că există adevăruri ale matematicii exprimabile în interiorul sistemului, dar care nu pot fi demonstrate. Rămâne atunci posibilitatea să obținem o demonstrație de consistență dacă apelăm la *mijloace «mai tari»* decât cele exprimabile în sistemul respectiv; după cum am văzut, Gentzen a realizat acest lucru (a demonstrat consistența lui S) folosind metoda inducției tranfinite implicând metode ale teoriei generale a mulțimilor, numai că această demonstrație n-a avut un caracter finitar.

În ultima perioadă, metoda de demonstrație a lui Gödel a fost abordată cu ajutorul funcțiilor recursive. Se utilizează *numărarea gödeliană*, adică se construieşte o funcție care stabileşte *o corespondență biunivocă* între semne f.b.f.*, secvențe de f.b.f. ale unui sistem formal şi numere naturale. Aşadar semnele fundamentale ale teoriei de ordinul întâi sunt numărabile. Fiind dat un semn, f.b.f. sau secvența de f.b.f., noi putem calcula *numărul lui Gödel* asociat şi, viceversa, putem decide dacă un întreg dat este un număr Gödel al unei configurații simbolice şi să identificăm configurația respectivă. Structura sistemului este astfel explicitată că se poate distinge între un semn şi un element al unei secvențe, având asociate numere

* formule bine formate

gödeliene diferite. După ce se stabileşte corespondenţa dintre aritmetică şi limbajul formal, se poate uşor remarca faptul că orice proprietate a sistemului dă naştere la o proprietate aritmetică şi viceversa. Această *atribuire de numere,* prin funcţia biunivocă, este numită *aritmetizarea metamatematicii*, în sensul că enunţurile despre sistemul formal devin, *via numărarea gödeliană*, enunţuri în *teoria numerelor*. Această reprezentare a numerelor naturale în interiorul sistemului, devine mai clară cu ajutorul noţiunilor de *funcţie recursivă* şi *mulţime recursivă,* ale căror definiţii le presupunem cunoscute. În virtutea corespondenţei biunivoce dintre *obiectele lingvistice ale unui sistem formal* şi *numerele naturale*, corespondenţă stabilită prin numărarea gödeliană, putem vorbi de mulţimea f.b.f. ca recursivă, dacă mulţimea corespunzătoare ei a numerelor Gödel este recursivă. Similar, o relaţie între f.b.f. este recursivă dacă relaţia corespunzătoare asupra numerelor naturale este de asemenea recursivă. Urmează că cerinţa ca mulţimea de axiome ale unui sistem formal să fie „*mecanic decidabilă*" poate să fie acum riguros definită cu ajutorul *recursivităţii*: anume, mulţimea ei, a numerelor Gödel trebuie să fie recursivă. Din acest punct de vedere recursiv putem defini noţiunea de *sistem axiomatic*: un sistem a cărui mulţime de axiome este recursivă va fi numit axiomatic. Noţiunea de *recursivitate* poartă de la numerele naturale la semnele şi expresiile sistemului formal. O problemă importantă este cea a relaţiei dintre funcţiile calculabile şi recursive. Noi avem o *noţiune intuitivă de calculabilitate, independent de definiţia formală a recursivităţii*, fapt evident cu privire la numărarea gödeliană. Funcţia G care ne dă «*numărarea* Gödel» a semnelor şi expresiilor este calculabilă, în sensul că putem identifica o expresie, plecând de la numărul ei gödelian şi se poate calcula numărul gödelian, al unei expresii. Noi apelăm la recursivitatea lui G, deoarece numai prin G noţiunea de recursivitate este definită pentru expresii formale. Pentru a vorbi de recursivitatea unei mulţimi de obiecte, cu ajutorul unei funcţii biunivoce care le pune în corespondenţă cu numerele naturale, este necesar ca funcţia să fie intuitiv efectivă.

Următoarea teză – *toate funcţiile calculabile sunt recursive* – este *teza lui A. Church.* Această teză poate fi formulată prin mai multe moduri de a defini calculabilitatea (cu ajutorul maşinii Türing, algoritm

Marcov), moduri echivalente, ceea ce sugerează că intuiția care le-a fundat este aceeaşi.

Formularea rezultatului (1) prezentată aici este atribuită lui Gödel şi Rosser şi este numită *teorema Gödel-Rosser;* rezultatul original al lui Gödel fiind mai slab şi implică noțiunea de ω-consistență (vezi Rosser [1]).

5.9. FORMALISMUL – FILOSOFIE CONTEMPORANĂ A MATEMATICII

Formalismul ca filosofie contemporană a matematicii a devenit predominant la mijlocul secolului nostru şi, deşi descinde din opera lui D. Hilbert, nu se identifică integral cu atitudinea filosofică a acestuia care emerge din meta-matematica sa. N. D. Goodman [1, p. 542] invocând scrierile lui Hilbert [3] şi G. Kreisel [3] afirmă că trebuie distinse că concepțiile hilbertiene, adesea numite „*formalism*", de *poziția formalistă* pe care o avem în vedere, deoarece matematicianul german a admis că matematica finită, combinatorie, posedă *semnificație* şi *adevăr*, ceea ce, evident, excede *definiției formaliste a matematicii:* matematica este manipulare guvernată de reguli, sau *formală*, a simbolurilor şi nimic altceva. D. Hilbert a inventat metamatematica din anumite rațiuni şi pentru anumite rosturi fundaționale ce vizau justificarea matematicii infinitului. S-ar putea spune că filosofia hilbertiană are o substanță mai complexă decât cea a formalismului contemporan, pe care îl avem în vedere, fiind mai curând caracterizată ca o combinație specifică de «*realism al finitului*» şi «*formalism pentru infinit*». Poziția formalistă prezentată aici este identificată în studiile şi articolele lui H. Curry [2], [3], A. Robinson [2] şi P. Cohen [2]. Oamenii de ştiință, interesați în domeniul computerelor şi inteligenței artificiale, care nu găsesc diferențe semnificative între inteligență umană şi computere, tinzând s-o asimileze pe prima celei de-a doua, aderă şi ei la un asemenea punct de vedere formalist pe care l-am descris mai sus, ajungând în final la întrebarea-răspuns: „puteți dvs. imagina un matematician care lucrează în orice alt mod decât prin manipularea simbolurilor?".

Filosofia formalistă defineşte matematica ca ştiinţă a demonstraţiei riguroase, poate, mai complet, o «*arhitectură de demonstraţii*» formale, logice. Desigur, o asemenea demonstraţie (formală, logică) are un punct de plecare: termeni nedefiniţi şi enunţuri nedemonstrate despre termeni, numite „asumpţii" sau „axiome", ca de exemplu, în geometrie unde „punct", „linie" etc., au rolul de termeni nedefiniţi, iar enunţul: „prin orice două puncte distincte trece exact o singură linie dreaptă" este o axiomă. Formalistul nu asociază enunţului un tablou (imagine) mental(ă) şi numai în urma unei interpretări oferite termenilor „punct", „linie" altor termeni, axiomele devin adevărate sau false şi, evident, se prezumează că există o interpretare în care ele sunt adevărate. Oricum, pentru formalist interpretarea rămâne irelevantă, interesul lui concentrându-se asupra deducţiei logice, ale cărei rezultate sunt teoremele despre care, de asemenea, el nu afirmă că sunt adevărate sau false, ca şi în cazul axiomelor. Tot ceea ce el afirmă, este că teoremele urmează logic din axiome, enunţurile teoremelor neavând conţinut, căci nu poartă asupra a ceva, nu sunt despre ceva; procesul logic al deducţiei teoremelor le conferă consistenţă, evitând orice „fisură" logică. Pe scurt, *din punct de vedere formalist, matematica este ştiinţa deducţiilor formale,* de la axiome la teoreme, termenii ei definiţi, enunţurile ei neavând conţinut până ce o interpretare i-a fost asociată. Un exemplu concret va oferi un suport intuitiv acestor consideraţii general-abstracte. Presupunem că un formalist este întrebat care este conţinutul *teoremei fundamentale a aritmeticii.* Dacă adoptăm *formalismul strict*, răspunsul său va fi negativ, teorema fiind considerată de el o secvenţă de simboluri. Formalistul afirmă că această teoremă nu are o semnificaţie separată, distinctă de rolul ei în angajarea ei în diferitele activităţi simbolice ale matematicienilor. Dacă părăsim poziţia formalistă şi vom da o descriere mai precisă a activităţilor simbolice, luând în considerare, de exemplu, un sistem formal care codifică o parte a matematicii, atunci vom fi în stare să dăm o explicaţie a rolului *teoremei fundamentale*; mai mult, vom fi în măsură să specificăm una sau mai multe demonstraţii formale ale teoremei în sistemul pe care l-am ales şi să dăm exemple în care

folosim această teoremă în demonstrația altor teoreme, ceea ce va contura semnificația ei. Înainte de a prezenta unele observații critice la adresa filosofiei formaliste, amintim că în mod curent, concepția „*oficială*" în învățământ o adoptă ca o chestiune de fapt, în timp ce se remarcă un sort de implauzabilitate a ei atunci când este confruntată cu experiența matematică obişnuită sau standard, în acord cu care profesorul de şcoală elementară predă matematica despre „fapte ale aritmeticii", „fapte ale geometriei" etc., iar în şcoala superioară *teorema lui Pitagora* sau *teorema factorizării prime* sunt în fapt enunțuri despre triunghiuri sau despre întregi, o atitudine neîmpărtăşită de aşa-numita concepție „oficială", dominată de formalism, sau, mai bine spus de acesta de urmă.

Într-adevăr, „detronarea" geometriei euclidiene, care pretindea că pleacă de la „adevăruri self-evidente", prin descoperirea geometriei noneuclidiene, inspirată tocmai de tentația demonstrării postulatului paralelelor, datorate insuficientei lui auto-evidențe, a părut drept o pledoarie în favoarea filosofiei formaliste. Această situație metodologică inedită în câmpul investigațiilor fundaționiste ale matematicii a avut unele consecințe ce au favorizat *punctul de vedere formalist* asupra *naturii* şi *statutului matematicii* ca ştiință. La întrebarea dacă postulatul paralelelor şi negația lui sunt ambele adevărate, filosoful formalist apărând dreptul matematicianului de a studia ambele tipuri de geometrie – euclidiană şi neeuclidiană – propune ca răspuns renunțarea la noțiunea de *adevăr* (adică, faptul că sunt adevărate) şi invocă drept suficientă noțiunea de *consistență*, aplicabilă disciplinelor matematice în cauză. Conflictul între cele două geometrii are la bază credința că această disciplină matematică poartă asupra spațiului fizic obiectiv, guvernat de un anumit set de legi, pe care aceste două teorii geometrice încearcă să le descrie; dacă renunțăm la o astfel de credință, atunci aceste teorii matematice – am numit geometria euclidiană şi geometria neeuclidiană – nu mai sunt rivale, ci doar două teorii diferite, *postulatele paralelelor* în acestea fiind valabile şi deci adevărate cu privire la *linia dreaptă euclidiană,* respectiv la *linia neeuclidiană.* Rămân teoremele geometriei semnificative independent de interpretările fizice, are sens să atribuim „adevărat" şi „fals" enunțurilor aparținând matematicii (respectiv geometriei) pure? Dacă

platonistul răspunde afirmativ în virtutea tezei centrale a concepției sale că există obiecte matematice configurate într-un univers distinct de cel al obiectelor fizice; un punct de vedere cu care formalistul nu poate fi de acord cu acest răspuns în virtutea aserțiunii centrale, în doctrina pe care o împărtăşeşte, conform căreia enunțurile matematice (ale geometriei, aici) nu pot fi nici adveărate nici false, deoarece ele nu semnifică nimic, nu spun nimic despre ceva. Formalistul operează o distincție tranşantă între *geometria matematică* configurată ca o autentică *structură deductivă* şi *geometria fizică* concepută ca o *știință descriptivă*, rezervând numai pentru prima un loc în domeniul matematicii; apelul la diagrame sau imagini mentale este irelevant şi deci superfluu în sfera matematicii pure şi, mai mult, când examinăm edificiul deductiv al acestei ştiințe riguroase, a ne întreba de ce am ales cutare sau cutare axiome ca premise ale lui, rămâne pentru formalist o chestiune de natură pre-matematică; pentru formalist nu este demnă de interes nici *problema aplicațiilor* acestei structuri deductive care configurează o disciplină matematică, în cazul de aici, geometria; singura activitate matematică relevantă este *enunțarea* ipotezelor (*axiomelor*) şi *derivarea concluziilor* prin *mecanismul demonstrațiilor formale,* riguroase, *mediul* autentic al *manipulării formale a simbolurilor.*

Aşadar, pentru formalism această „*manipulare*" formală a simbolurilor contează, în această viziune nu există obiecte matematice, aşa cum susține platonismul. *Matematica*, în esență, *rezidă* în formule, adică *axiome, definiții* şi *teoreme. Formalismul extrem* susține că există reguli în virtutea cărora matematicianul derivă o formulă din alte formule, dar care nu sunt despre nimic, sunt doar secvențe, şiruri de simboluri. În viziunea formaliştilor o formulă matematică autentică nu are semnificație şi nici valoare de adevăr, iar când sunt nevoiți să se refere la aplicații la probleme fizice, ei conced că formula în cauză a primit o interpretare fizică, în virtutea căreia primeşte o semnificație, putând fi adevărată sau falsă. Adevărul (sau falsul) cu care se operează în acest context, formalistul îl atribuie exclusiv acelei interpretări fizice particulare, continuând să rămână irelevant de îndată ce plasăm discuția în planul matematicii pure.

Ne întoarcem la anunțatele *observații critice* privind unele teze ale *filosofiei formaliste* a matematicii. Putem fi de acord că matematica implică *manipularea formală* a simbolurilor, cu alte cuvinte un matematician în mod obişnuit lucrează în interiorul unui *sistem formal*, un aspect important al activității matematice, subiect de investigație al teoriei funcțiilor recursive, ramură a logicii matematice. Această teorie a relevat aspecte ale naturii matematicii, în primul rând a contribuit la aprofundarea înțelegerii noastre a limitelor inerente acestei ştiințe: *matematicienii nu vor putea calcula vreodată o funcție nerecursivă,* sau vor rezolva o *problemă recursiv insolubilă*, sau, vor putea lucra într-o *teorie* care nu este *recursiv axiomatizabilă.* De aici nu urmează justificarea de tip formalist să admitem că mintea umană funcționează asemănător procedeelor algoritmice, în sensul în care discută despre aceste teorii ale funcțiilor recursive. Formalismul apare aici ca o *teză absolutistă doctrinar*, căci transgresează un plan metodologic, cel al accentului pus pe simbolism şi formalisme matematice, în direcția evidentă a unei *absolutizări căreia îi scapă reconstituirea integrală a naturii cunoaşterii matematice.*

Dificultățile formalismului sunt mai marcante, atunci când este confruntat cu *problema fundamentelor matematicii,* direct conectată cu *cea a existenței entităților matematice*; să ne imaginăm difucultățile unui matematician formalist creator, adică să scrutăm mai atent relația dintre *creativitate* şi *rolul* exterior al *simbolurilor* în interiorul unei *activități matematice reale,* autentice în timpul soluționării unei probleme. Mărturiile matematicianului care lucrează creativ, consemnează că el în procesul căutării soluției nu are de-a face atât cu simboluri, cât mai curând cu *idei* şi *construcții* (cf. N. D. Goodman [1, p. 543]); este evidentă dificultatea, când încearcă să-şi exprime ideea într-un mod formal, care la început este pregnant însoțită de imagini vizuale. Progresul în clarificarea ideii este relevat de *modul formal* din ce în ce mai adecvat care o exprimă, structura ei internă fiind încă necodificată simbolic. Chiar dacă avem aici o împletire a *categoriilor psihologice* cu cele *epistemologice* în investigație, lucru greu de evitat,

oricum pare convingător să susținem *prioritatea ideilor, construcțiilor, demonstrațiilor,* ca veritabile entități matematice, *față de simboluri,* care într-un anumit sens au un rol exterior. Această ultimă parte a ideii subliniate poate fi uşor evidențiată prin referire la discuțiile matematicienilor despre idei, construcții şi demonstrații. Matematicienii discută curent despre, dacă două studii exprimă aceeaşi idee, dacă două şiruri de simboluri distincte exprimă aceeaşi construcție, sau dacă două conferințe expun aceeaşi demonstrație, conchide N. D. Goodman [1, p. 543]; şi, chiar mai mult, ei fac distincția între o demonstrație nouă şi una veche a unei teoreme, criteriul nefiind unul de ordinul formei. *Esența formalismului* o constituie *negarea realității obiective a construcțiilor matematice* luate ca *intuiție,* adică, care nu sunt *nici formale* şi *nici simbolice* şi care sunt vitale pentru practica matematicii; *intuitiv* are aici sensul de opus *formalui*, supralicitat în formalism, un argument putând fi considerat intuitiv dacă este natural şi decurge uşor. *Demonstrația*, ca specie a genericului *construcții* (matematice) are statutul de a fi intuitivă, atunci când există independent de simboluri, adică este neformalizată; în virtutea structurii sale interne, demonstrația (intuitivă) produce rezultate şi nu datorită simbolismului care o codifică şi prin acest specific al ei îşi dă măsura ei de *productivitate creativă* în sfera matematicii.

De la *realitatea matematică* (ca problemă) se ajunge, aproape, direct la *problema fundamentelor matematicii* în viziunea formalistă care declară aproape tot ansamblul matematicii pure drept un «*joc simbolic fără semnificație*», o teză drastic sancționată de *intuiționism* (constructivism) care nu a admis ca această „*bijuterie a spiritului uman*" să fie tratată ca un joc de semne vid de orice semnificație. Diferența dintre formaliști şi platoniști este clară în problema fundamentelor matematicii, în context cel mai adesea fiind invocat cazul *ipotezei continuului* a lui G. Cantor. Pe scurt, Cantor a făcut ipoteza că nu există număr cardinal infinit mai mare decât χ_0 (*cardinalul întregilor*) şi mai mic decât c (*cardinalul numerelor reale*). Se ştie că K. Gödel şi P. Cohen au obținut rezultate remarcabile, referitoare la această problemă, ce au marcat *situația* din *fundamentele matematicii;* primul a demonstrat

consistența axiomei în cauză cu restul axiomelor teoriei mulțimilor, cel de-al doilea a demonstrat *independența* acestei axiome (am numit *ipoteza continuului*) față de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. Problema a fost pusă în următorul cadru: Gödel [1]–1947 a reuşit să arate că ipoteza continuului a lui Cantor nu poate fi demonstrată pe baza axiomelor teoriei formale a mulțimilor; Cohen [1]–1964, a arătat în acelaşi context menționat că ipoteza lui Cantor nu poate fi infirmată. Am făcut referire la aceşti doi autori din două motive: 1) amândoi au numele legat de două mari rezultate ce au marcat *destinul cercetărilor fundaționale ale matematicii*; 2) reprezintă cele două filosofii rivale ale matematicii – *platonismul şi formalismul* – acesta din urmă fiind din punct de vedere filosofic de sorginte nominalistă şi instrumentalistă, curente adversare *realismului*, a cărui *specie marcantă* este *platonismul*. Acum, fără să detaliem concepția fundațională a autorilor invocați, ne limităm să spunem numai că pentru un platonist, şi Gödel este poate cel mai reprezentativ pentru această direcție filosofică, orientare din filosofia matematicii a secolului XX, rezultatul gödelian semnifica faptul că axiomele noastre sunt incomplete pentru a ne oferi o descriere adecvată a *mulțimii numerelor reale, regiune a realității matematice*; aceste axiome nu ar fi, în spiritul concepției gödeliene, suficient de puternice ca să ne releve complet întregul adevăr. *Ipoteza continuului* este sau adevărată sau falsă, dar noi nu dispunem de o înțelegere satisfăcătoare a mulțimii numerelor reale pentru a găsi răspunsul acestei probleme, adică pentru a putea decide asupra statutului ipotezei continuului, cunoscută şi ca *problemă a continuului a lui Cantor*. Pentru alte detalii a se vedea Gödel [1] şi unele observații din expunerea noastră din cap. 5. § 3. În ceea ce îl priveşte pe P. Cohen, el însuşi a declarat (Cohen [2, p. 13]) că a ales poziția formalistă, fiind puternic influențat de A. Robinson [2], respingând într-o formă sau alta orice formă de realism (platonism, când ne referim la matematică). Să amintim că reprezentanții filosofiei formaliste a matematicii, şi numim cel puțin pe A. Robinson şi P. Cohen, îşi revendică rădăcinile punctului lor de vedere filosofic ca fiind aşezate în opera lui D. Hilbert, deşi noi am ținut să remarcăm specificul distinct

al concepției hilbertiene. A. Robinson [2, p. 556] declară expres: „După cum o indică titlul, poziția mea este în principiu solidară cu cea a lui Hilbert şi a şcolii sale. Am adăugat anul 1964, nu numai pentru că astăzi se ştie (dar nu se ştia în 1925) că programul lui Hilbert este sortit eşecului, ci şi pentru că actualul tablou al bazelor matematicii a fost modificat de către dezvoltări importante în alte direcții, diferite de formalism. Mai vreau să adaug că nu pot subscrie la nici una din afirmațiile lui Hilbert pe acest tărâm. De fapt, intervenția mea nu trebuie privită nici ea ca o descriere a unei situații istorice, nici ca un manifest care încearcă să stabilească o lege, ci mai degrabă ca o confesiune, ca o confirmare a unui punct de vedere personal, dobândit după un îndestulător număr de ani. Cât priveşte acest punct de vedere, nu pretind nici adeziunea cu fidelitate la vreo şcoală existentă, nici nu-i revendic statutul unei originalități fundamentale". Aşadar acest sort de *formalism contemporan*, deşi *solidar în principiu cu poziția hilbertiană în filosofia matematicii*, nu se reclamă ca aparținând unei şcoli sau direcții în fundamentele matematicii, fiind mai degrabă un ansamblu quasicoerent de reflecții, credințe inspirate de experiența în domeniu a autorului, având, cum spune însuşi Robinson, statutul unei *alegeri* al cărei „resort" este de „natură empirică", ceea ce în interpretarea noastră are caracterul unei *concepții cu caracter pragmatic,* într-un sens liberalizat de conotații istorice; receptiv la „rezultate tehnice", Robinson declară că nu împărtăşeşte nici un crez filosofic. Poziția adoptată de A. Robinson se bazează pe următoarele două principii: 1) mulțimile infinite nu există în nici un sens al cuvântului (adică nici în sens real, nici în sens ideal), orice referire sau aluzie la mulțimile infinite este lipsită de înțeles; după cum se observă, poziția lui Robinson e diferită de cea hilbertiană, aceasta din urmă lăsând un loc şi un statut pentru infinit în „*partea ideală*" a matematicii, aşadar, poziția lui Robinson față de infinitul matematic este una extremă, drastică, contestându-i orice legitimitate ontologică, metodologică şi poate chiar epistemologică; 2) a doua aserțiune centrală a poziției lui A. Robinson ne pare a fi o atenuare a caracterului prea tranşant a primei aserțiuni şi pare a «*introduce infinitul pe uşa din dos*» în matematică, cu toate acestea

vom continua să practicăm matematica «în mod obişnuit», adică vom acționa ca şi cum mulțimile infinite ar exista realmente". Primul principiu are un caracter *descriptiv*, al doilea pare a fi o *prescripție* demnă de urmat. Oricum, abordând *problema infinitului* Robinson atacă în fapt o problemă care o subordonează, aceea a *existenței în matematică*, direct conexată «*fundațiilor*» (axiomelor, postulatelor) matematicii. „*Nominaliştii* declară existența mulțimii numerelor naturale drept o iluzie, în timp ce *realiştii platonicieni* cred, în genere, în existența ideală a enităților matematice, afirmă A. Robinson, inclusiv în existența mulțimilor transfinite de numere cardinale, oricât de mari, în măsura în care ele pot fi introduse cu ajutorul unor axiome adevărate". Şi continuă, autorul citat, cu aserțiuni relevante pentru platonism dar şi cu precizări ce ar nuanța concepția în cauză: „platonicienii cred în adevărul obiectiv al teoremelor matematice deoarece cred în existența obiectivă a entităților matematice". Este menționat Gödel, considerat cel mai marcant platonician contemporan, pentru analogia pe care acesta a relevat-o privind investigarea obiectelor fizice şi a celor matematice, din care a extras o concluzie care a şocat pe formalişti, şi anume marele logician al secolului nostru a declarat că nu vede nici un motiv pentru a admite existența obiectivă a celor dintâi şi pentru a nega existența celor din urmă. Robinson declară că noțiunea de *clasă particulară de cinci elemente*, de exemplu, *de cinci scaune*, se prezintă minții noastre tot atât de limpede ca noțiunea de element izolat, un anumit scaun, prin aceasta el se îndepărtează de nominaliştii care realizează noțiunea de individual, dar nu sunt capabili să o conceapă pe cea de clasă. Vom înțelege mai bine particularitățile *poziției formaliste* a lui A. Robinson, dacă urmărim acest pasaj din studiul din 1964: „Prin contrast, mă simt absolut incapabil să realizez ideea de mulțime infinită reală. După părerea mea, există o prăpastie de netrecut între mulțimile sau structurile de unul, două sau cinci elemente, pe de o parte, şi structurile infinite, pe de alta, ori mai precis, între termenii care denotează mulțimi sau structuri de unul, două sau cinci elemente şi termenii meniți să denoteze mulțimi sau structuri alcătuite din elemente infinit de numeroase. Aşa cum e enunțat aici,

acest punct de vedere priveşte noţiunea de *infinit* în teoria mulţimilor abstracte cu referire specială la infinitul cardinal. Totuşi, alte tipuri de infinit pot fi semnificative pentru discuţia noastră, îndeosebi *infinitul ordinal*, ca în teoria numerelor ordinale, sau infinitul din geometrie, cum ar fi lungimea infinită. Deşi acestea pot fi reduse prin considerente matematice la infinitul cardinal, se poate aduce argumentul că, din pounct de vedere filosofic, infinitul ordinal sau infinitul geometric sunt mult mai esenţiale decât infinitul cardinal şi permit înţelegerea noţiunii de infinit în toalitatea sa. Trebuie prin urmare să adaug că sunt de asemene incapabil să surprind infinitul ordinal sau infinitul geometric. Rezultă că trebuie să consider că o teorie care se referă la o mulţime infinită este lipsită de înţeles în sensul că termenii şi propoziţiile nu pot avea acea corespondenţă cu o structură reală pe care am aştepta să o aibă în analogie cu situaţiile concrete (de pildă empirice). Aceasta nu vrea să spună însă că o asemenea teorie e absurdă sau lipsită de semnificaţie". Iar în 1969 scria: „Eu nu pot să-mi imaginez să mă întorc la credoul platonistului autentic care vede lumea infinitului actual desfăşurată în faţa lui şi care crede că poate înţelege incomprehensibilul". Ceea ce ne interesează aici este mai cu seamă referirea lui A. Robinson la rezulatele lui Gödel şi Cohen, relevanţa lor set-teoretică, ca şi la implicaţiile lor filosofice. Robinson [2, p. 581] spune: „În vreme ce acest lucru sugerează formaliştilor că întreaga noţiune de univers al mulţimilor e lipsită de înţeles (în sensul indicat de principiul nostru prim), platonicienii conchid numai că propoziţiile de bază şi unanim acceptate ale universului de mulţimi cunoscute nouă, până astăzi sunt suficiente pentru a rezolva într-un fel sau altul ipoteza continuului. Ei vor menţine afirmaţia, atât în acest caz cât şi în cele similare, că oricum una din alternativele avansate de ei este corectă, adică în concordanţă cu *adevărul*. Ajunşi aici, au de înfruntat problema dacă în acest domeniu adevărul este sau nu cu necesitate *discernabil* pentru gândirea umană. După câte ştiu, doar o slabă minoritate de matematicieni, chiar dintre cei cu vederi platoniciene, acceptă ideea că pot exista fapte matematice *adevărate* dar incognoscibile. Dacă, dimpotrivă, un platonician susţine că orice adevăr

matematic despre universul mulțimilor sau despre o structură specifică, este cu necesitate discernabil, atunci i se cere să-şi analizeze propria sa modalitate de a se exprima. În speță, trebuie să reflecteze la întrebarea dacă un adevăr este discernabil numai dacă va fi (cu necesitate) discernabil cândva, şi lucrurile stând aşa, dacă aceasta implică obligatoriu descoperirea unor noi supoziții «naturale» sau a unor forme de argumentare acceptabile pentru toți, sau pentru aproape toți matematicienii. În orice caz, ni se pare că situația actuală din teoria mulțimilor îi favorizează pe formalişti".

Dacă situația din *teoria mulțimilor* îi favorizează pe formalişti, situația din *teoria numerelor* este diferită, deoarece *incompletitudinea oricărui sistem de axiome în această teorie*, exemplele invocate pentru demonstrarea acestui fenomen şi mai precis faptul că *enunțul gödelian care afirmă propria sa nedemonstrabilitate*, afirmă totodată şi *adevărul* său *îi favorizează pe platonicieni*. Problema „*bifurcării*" din teoria mulțimilor şi teoria numerelor este iluzorie din punctul de vedere al platonicienilor, deoarece numai una dintre alternative, cea care conține ipoteza continuului este adevărată, o problemă irelevantă din punct de vedere formalist care nu asimilează teoria mulțimilor şi teoria numerelor ca o parte esențială proprie. Considerând ambele alternative ca posibile, formaliştii nu văd în *situația fundațională a „bifurcării"* un *test definitiv împotriva* sau *în favoarea platonismului*. Interpretarea platonistă nu are sens din punct de vedere formalist, deoarece adepții acestei concepții nu recunosc existența sistemului de numere reale, cu excepția faptului că îl creăm pentru a-l descrie. Schimbarea unui sistem de axiome o facem dacă noi o dorim din considerente de convenanță, utilitate sau pe alte criterii, dar în nici un caz din motive pentru o mai bună corespondență cu realitatea matematică (asupra căreia ar purta discursul matematic, aici set-teoretic, sau de teoria numerelor), o exigență cu sens dezirabilă din perspectiva platonismului matematic.

Completăm acest tablou al considerațiilor formaliste cu unele remarci metamatematice datorate sau inspirate din studiul lui P. Cohen [2]. Ideea fundamentală a comentariilor formaliste asupra fundamentelor

teoriei mulțimilor din Cohen [2] este aceea că matematica este «*un joc formal*» confruntat cu *chestiuni ale consistenței* şi pentru care *problema adevărului* nu are sens atâta timp cât discursul lingvistico-matematic nu presupune *semnificația şi referința*, adică *o realitate matematică*, nişte obiecte matematice. Cohen recunoaşte că filosofia realistă a metmaticii, adică platonismul, susține ideea că toate problemele, ca de exemplu *ipoteza continuului* şi *altele,* sunt adevărate sau false în domeniul postulat al entităților matematice, în ciuda independenței lor în raport cu restul axiomelor, sau cu diferitele sisteme de axiome. El opinează că majoritatea matematicienilor împărtăşesc o poziție realistă, pe care o chestionează doar când începe confruntarea cu dificultăți ce emerg din adoptarea ei, şi atunci o părăsesc îndreptându-se spre adăpostul oferit de formalism. Dar, oricum, se concede că poziția realistă (*platonismul*) *are avantajul că se dispensează de justificarea axiomelor*; nu este nevoie să explicăm, în perspectiva platonică, consistența axiomelor teoriei mulțimilor şi nici de ce aceste axiome particulare alese se dovedesc fructuoase teoretic. O slăbiciune a poziției formaliste, care renunță la orice supoziție, privind o realitate (matematică) subiacentă teoriei mulțimilor,. este obligația de a explica de ce axiomele acestei teorii sunt capabile să demonstreze enunțuri aritmetice nedemonstrabile prin mijloace finitare (finitiste), o slăbiciune compensată de inabilitatea realistului de a explica sursa şirului nefârşit de axiome mai înalte, cum sunt *axiomele infinitului* şi, mai ales, „*reculul*" lui *în fața comtemplării cardinalilor* de un tip suficient de *inaccesibil*, la care poate adăuga exemplul *axiomei cardinalilor măsurabili,* situații în care nu dispunem de o existență intuitiv convingătoare în favoarea (acceptarea) sau respingerea axiomelor respective. Şi Cohen, ca şi Robinson, opinează că *rezultatele de independență* au constituit o veritabilă provocare a poziției realiste în matematică, după cum unele propoziții insolubile, sau nerezolvate încă, din teoria numerelor, dezavantajează poziția formalistă. Platonicienii par să susțină despre consis (ZF + Cardinalul Măsurabil) că poate fi redusă la consistența enunțurilor puternice adecvate considerate ca axiomele infinitului. Optimiştii cred că orice problemă de teoria numerelor poate

fi decisă invocând o axiomă adecvată a infinitului. După Cohen multe lucrări asupra *problemei independenței* au lăsat impresia stranie că teoria mulțimilor se referă la obiecte matematice „reale". Deşi observațiile lui Cohen despre relația dintre *ipoteza continuului* şi *postulatul constructibilității* sunt interesante şi converg spre rezultatul că acesta din urmă ar putea contribui la *deciderea problemei continuului*, fapt ce îi aparține chiar lui şi este datorat inventării metodei *forcingului*, ne grăbim să spunem despre cum, prin *metoda modelelor* (semantica sistemelor formale), asistăm la „*infiltrații*" *realiste* (*platoniciene*) în investigațiile fundaționale ale matematicii. Într-adevăr, în mod curent, *matematicianul activ* (working mathematician) preferă să discute nu despre sisteme formale şi modul de formare al formulelor acestora, ci despre modelele unui sistem de axiome; aşadar, este mai interesat de modele decât de *mulțimea tuturor formulelor demonstrabile*, deşi, în virtutea teoremei de completitudine cele două puncte de vedere (perspective de analiză), abordare (semantic şi sintactic) sunt echivalente. Dar, acest mod de a privi lucrurile pare să instaleze şi să facă confortabilă *poziția realistă*, deoarece discuția despre metode şi enunțuri (în plan logic-lingvistic) este înlocuită cu discuția despre modele, care fiind abstracții adecvate unui sau unor formalism(e) sunt, în mod aproape natural, ipostaziate ca „*obiecte*", un *termen* favorit *al platonismului*, un sort de „*substanțializare*" ce este inerentă unei asemenea maniere de abordare. Această „substanțializare", *convertire* a unui *proces, relație* în *entitate distinctă,* eventual *independentă,* a fost remarcată şi în dezvoltarea analizei reale în legătură cu *conceptul de funcție*, care gândită, inițial, ca o regulă de asociere de numere la numere, a fost ulterior tratată ca o entitate independentă. Preferința pentru entități abstracte (ex. mulțimi abstracte), vis-à-vis de construcții specifice, a avantajat ascensiunea teoriei lui Cantor, fenomen constatat şi în *teoria categoriilor* unde o formulare de genul „**G** aparține categoriei grupurilor" este adoptată mai natural decât formularea „**G** este un grup"; motivul rezidă în facilități teoretice datorate *transferului de metode* de la o categorie la alta, a teoremelor generale, ceea ce permite demonstrarea unor teoreme generale

despre categorii. Ultimele subiecte ale studiului lui Cohen sunt despre *axioma cardinalilor inaccesibili* – pe care o discută sub aspectul *justificării*, linia de forță a raționamentului fiind analogia cu distincția *finit-infinit*, aici de ce nu accesibil şi inaccesibil, şi motivul că experiența a arătat că acceptarea cardinalilor inaccesibili nu conduce la contradicții, *consistența* fiind *obiectivul legitim al oricărui demers formalist autentic; subiect major este* şi problema *impredicativității* (definițiile impredicative) care, nerestricționată, a condus la *paradoxuri*, de care se face vinovat *realismul,* cel puțin în varianta de *platonism ontologic.*

* * *

Ca şi platoniştii, formaliştii admit că teoriile matematice au modele, atunci când li se asociază o interpretare, bineînțeles că nu luăm aici în considerație *varianta strictă de formalism*, care nu consideră matematica o teorie matematică formală interpretată. Deosebirea dintre formalişti şi platonişti este că, primii neagă că ar exista un model determinat pentru o teorie matematică dată. Mai mult, asemenea formalişti sunt de acord cu platoniştii cu privire la faptul că valoarea de adevăr a unei propoziții, a unei teorii, este determinată relativ la un model dat. Ca şi platoniştii, şi formaliştii susțin că valoarea de adevăr a unei propoziții nu depinde de cunoaşterea noastră pe care o avem despre ea, ci derivă din *postulatul realității matematice*, existentă independent de matematician şi pe care activitatea sa are rolul de a o descrie. Dar, în timp ce platonistul lucrează cu un model unic, cel *intenționat, avut în minte*, a cărui structură axiomele o determină până la izomorfism, formalistul afirmă că interesul lui se îndreaptă, probabil «*echidistant*», către toate modelele sistemului respectiv. Din perspectivă formalistă, problema determinării propozițiilor unei teorii ca adevărate sau false este legată de cea a existenței unor astfel de modele, ca şi de modul în care propozițiile le descriu. După M. Dummett [1], în perspectiva formalismului (evident „nu avem în vedere versiunea strictă), conținutul unei asemenea aserțiuni matematice este totdeauna *condițional*: „dacă există o structură care satisface axiomele analizei sau teoriei numerelor, sau teoriei mulțimilor, atunci cutare teoremă este valabilă despre acea structură". O problemă legată

de aceasta este cea a *aplicațiilor* unei teorii matematice în interiorul unor regiuni ale matematicii, aplicația constând în ceea ce este numit *realizare* sau *instanțiere*, adică identificarea unei structuri particulare (inel, corp etc.) justifică aplicarea la acea structură a teoremelor pentru inele în general, corpuri în general, remarcă M. Dummett [1]. Sau, demonstrația unei teoreme despre numere raționale invocând teoria numerelor reale, ca un auxiliar va depinde, continuă M. Dummett, de existența unui model pentru teoria numerelor reale, ceea ce se exprimă în planul conținutului *nu*: „*Pentru orice model Q de raționale, teorema T este valabilă în Q*", ci mai curând: „*Dacă există un model R de reale, atunci pentru orice model Q de raționale T* (teorema), *are loc în, este valabilă în, Q*". Totuşi, interpretarea acestui fapt este, în concepția lui Dummett, următoarea: acceptăm teorema despre raționale, deoarece suntem convinşi de existența numerelor reale; aici nu avem în vedere *formalismul extrem*, care nu admite existența numerelor reale, ceea ce aici am făcut-o chiar necritic, considerând această existență ca un fapt şi nu ca o ipoteză. Cu atât mai mult, trebuie să înțelegem aici un *acord* între *constructivişti* şi *formalişti* (*extremişti*), *care nu admit tratarea existenței continuului clasic ca o ipoteză neverificată*. Varietatea *extremistă* de formalism eşuează în domeniul investigațiilor fundaționale, deoarece negând existența structurilor din teoria mulțimilor, teoria numerelor, analiză, care au un rol fundamental în toate ramurile matematicii, îşi barează accesul la examinarea *totalităților crescătoare*, a căror sursă sunt tocmai structurile în cauză. Astfel, odată admisă existența numerelor naturale (ceea ce formalismul în varianta extremă nu face), existența unei structuri cu un domeniu *numărabil* încetează de a mai fi problematică, sistemul de numere naturale fiind sursa conceptului „*infînit de mulți*" (infinitely many). În mod similar, *continuul de numere reale* constituie sursa conceptului de „*infinități mai înalte*" (higher infinities). Ştim că în cadrul logicii de ordinul întâi, analiza şi teoria mulțimilor pot fi axiomatizate în vederea producerii de demonstrații adecvate, iar celebra teoremă a lui Löwenheim-Skolem ne asigură de existența modelelor numărabile. Dacă urmăm remarcile lui H. Putnam [1] referitoare la relevanța acestei teoreme pentru cele trei poziții principale asupra *referinței şi adevărului – poziția platonistă*

extremă care postulează „*puteri mentale nenaturale*" de a „surprinde" formele, aici „înțelegere" sau „surprindere", este după Putnam, o noțiune ireductibilă şi de neexplicat; poziția *verificaționistă*, care înlocuieşte noțiunea de adevăr cu noțiunea de *verificare* sau *demonstrație*; *poziția moderată, realistă*, care încearcă să mențină poziția centrală a noțiunilor de *adevăr* şi *referință*, dar renunță la postularea unor puteri mentale nenaturale – constatăm că teorema Löwenhein-Skolem, împreună cu rezultate din teoria modelelor, afectează *poziția realistă moderată*. Fără să intrăm aici în detalii, expuse de altfel şi în alte paragrafe, ne mulțumim să spunem, referitor la relevanța teoremei pentru formalism, că oricum este inevitabilă o *problemă filosofică*, plecând de la rezultatul conținut în teoremă, şi anume, „că *noțiunea intuitivă de mulțime* nu este «*capturată*» de sistemul formal. Dacă teoria axiomatică a mulțimilor nu capturează noțiunea intuitivă de mulțime, ce altceva ar putea s-o facă?" Putnam conchide că pare natural să ne gândim că ceea ce o captează este *ceva* diferit – „înțelegerea" noastră. Platonismul ar găsi răspunsul în faptul că mintea are facultăți misterioase de a „surprinde", „percepe" obiectele matematice. Oricum, *teorema* poate fi *interpretată* în *sensul limitării puterii* şi „*autonomiei*" *formalului* şi în *direcția unei poziții realiste* şi chiar *platoniste*, care acreditează ceva „*transcendent*", accesibil unei facultăți mentale misterioase.

***

Se apreciază că 30% din numărul matematicienilor sunt formalişti, pentru că în rândurile matematicienilor activi care lucrează creativ domină platonismul, o poziție realistă în domeniul fundamentelor matematicii. J. A. Dieudonné (1970, p. 145) scria: „Asupra fundamentelor domină platonismul, o poziție realistă în domeniul fundamentelor matematicii; noi credem în realitatea matematică, însă, desigur, atunci când spunem: «matematica este exact o combinației, de simboluri o facem până ce filosofii ne atacă cu paradoxurile lor şi, apoi, noi fugim în spatele formalismului fără semnificație»; apoi punem în scenă capitolele 1 şi 2 asupra teoriei mulțimilor. În final, suntem lăsați în pace să mergem înapoi

la matematica noastră pentru a o face cum am făcut-o totdeauna, cu sentimentul că fiecare matematician lucrează cu ceva real. Acest sentiment (senzație) este probabil o iluzie, dar una foarte convenabilă. Aceasta este atitudinea lui Bourbaki despre fundamente".

După Philip J. Davis şi Reuben Hersh [1, p. 342], un motiv pentru care *formalismul* a dominat în fundamentele şi filosofia matematicii s-ar datora conexiunii lui cu *pozitivismul logic*, un curent dominant în filosofia ştiinței în anii 1940–1950. „Şcoala de la Viena" (pozitiviştii logici) a lansat manifestul unei ştiințe unificate, codificată în calculul logic formal bazat pe metoda deductivă. Idealul formalizării tuturor ştiințelor a fost obiectivul principal al acestui curent (vocabular de bază al termenilor, enunțarea legilor fundamentale folosind aceşti termeni şi dezvoltarea logică a teoriei plecând de la aceste legi fundamentale); mecanica clasică şi cea cuantică au oferit primul exemplu de urmat de celelalte ştiințe. Teoria formală este legată, în concepția pozitiviştilor, de date experimentale prin intermediul aşa-numitelor reguli de interpretare şi care nu constituie o parte componentă a teoriei formale (ex. de reguli de interpretare în mecanica clasică: reguli de măsurare fizică a mărimilor ca masă, lungime, timp etc.). Matematica este considerată, în această viziune, doar un instrument pentru formularea şi dezvoltarea teoriei, legile fundamentale apărând ca formule matematice, de exemplu: în mecanică în forma ecuațiilor fundamentale; prin apel la raționamentul matematic, pornind de la aceste legi sunt derivate consecințele lor. Matematica nu este considerată o ştiință propriu-zisă, ea neavând un subiect specific; ea este numai, susțin pozitiviştii logici, o *structură formală* şi prin această aserțiune, centrală, pozitivismul logic a dus în domeniul filosofiei ştiinței la această concepție specifică despre natura şi statutul matematicii – *formalismul*.

Deoarece *matematica* este considerată o *ramură a cunoaşterii*, a cărei *structură* este *cel mai bine aprofundată*, se consideră că *filosofia matematicii este cea mai avansată ramură a filosofiei*, şi un model pentru celelalte domenii ale filosofiei. *Filosofia anglo-americană* identifică *filosofia matematicii cu logica şi studiul sistemelor formale. Stilul*

formalist în matematică este ilustrat de Şcoala, *grupul Nicolas Bourbaki*, despre care am spus câteva cuvinte la început. Să remarcăm că există *reacţii recente la formalism*, ce vin sub impactul rodnic al cercetărilor matematice, care vizează *concretul* şi *aplicabilul*. Oricum, *stilul formalist de a face matematica* îşi găseşte sursa în filosofia formalistă a matematicii; chiar dacă aceasta este marcată de limite, impasuri sau chiar eşecuri, ultimul caz atunci când ea cunoaşte forme şi variante extreme.

5.10. „PROBLEMA FUNDĂRII", ÎNCOTRO?

Pentru un filosof, cea mai „provocativă" situaţie din filosofia actuală a matematicii este aserţiunea că filosofia matematicii se află, după aprecierea lui S. MacLane [1], într-o stare de „somnolenţă", începând cu anul 1931 (teoremele lui Gödel). Aprecierea lui S. MacLane este susţinută de unele remarci ale lui K. Gödel [1], care au relevat că bogăţia de rezultate metamatematice nu a fost însoţită de analize filosofice substanţiale, sau de observaţia lui G. Kreisel [2] despre existenţa unei „asimetrii" între *analiza filosofică şi construcţia matematică* în teoria fundamentelor matematicii: (vezi, de asemenea: A. Robinson [1], A. Mostowski [1], [2]). Această stare a filosofiei este, oarecum, bizară şi paradoxală, dacă avem în vedere ce sursă fecundă pentru reflecţia filosofică a constituit „substanţa" teoremelor gödeliene: schimbarea viziunii noastre asupra naturii şi posibilităţilor logicii şi matematicii, asupra raţionalităţii umane, în general. Apar ca probleme legitime întrebările: care este statutul filosofiei la nivelul actual al investigaţiilor fundaţionale ale matematicii? Ce mai poate aştepta, astăzi, cercetarea fundaţională a matematicii de la filosofie? Care sunt modalităţile de implicare a filosofiei în acest tip de cercetare? Dar, la fel de legitimă este şi întrebarea: ce relevanţă comportă cercetarea fundaţională pentru potenţarea analizei filosofice? Problema care urmează a fi cercetată este dacă relevanţa cercetării fundaţionale a matematicii nu ar excede limitele domeniului specific al acestei ştiinţe, plecând de la câteva premise:

fenomenul matematizării generale a ştiinţei; poziţia singulară *sui generis* a matematicii în ansamblul culturii, în special ca matematică aplicată, o ştiinţă de un gen special, aflată la graniţa dintre ştiinţele exacte, umaniste şi experimentale, care foloseşte metode şi procedee, elaborate în fiecare dintre aceste grupuri de ştiinţe, ajunse la maturitate teoretică şi metodologică; rezultate şi sugestii epistemologice şi metodologice ca cele datorate lui H. Weyl privind rolul problemelor din ştiinţe pentru *dezvoltarea* matematicii (vezi şi J. von Neumann [3] care analizează problema relevanţei empirice, a interpretării fizice a matematicii, a infuziei de idei empirice mai mult sau mai puţin explicite); „*revoluţia calculatoarelor*", în esenţă, impactul calculatoarelor asupra cunoaşterii matematice, care a generat probleme filosofice serioase şi grave, precum analiza demonstraţiei *teoremei celor patru culori* (4 CT), care constată introducerea experimentelor empirice în matematică. Deci, plecând de la aceste premise care sugerează o situaţie conceptual-metodologică complexă, în mare măsură inedită, pentru *epistemologia matematicii „pure"*, suprasolicitată ca dimensiune a filosofiei matematicii, până acum câteva decenii, se poate formula un răspuns afirmativ la întrebarea, dacă cercetarea fundaţională a matematicii serveşte unui demers similar în alte ştiinţe. O relevanţă „*paradigmatică*", „exemplară" a cercetării fundaţionale a matematicii, pentru alte discipline, matematice, eventual sociale şi umane, este posibilă şi este mediată de *matematica aplicată* în forma modelelor lor. Noul context, apreciat fecund şi promiţător, excede epistemologiei matematicii pure, părăseşte *poziţia „absolutistă"* static-structural axiomatică, favorizată până acum, şi investighează o tematică diferită de cea abordată până în prezent. În acest cadru, au relevanţă probleme ca cele referitoare la *originea, evoluţia* (progresul) şi *aplicaţiile* matematicii şi, în consecinţă, locul studiului *structural* al matematicii „pure" îl ia studiul *dinamicii matematicii*, al rolului şi semnificaţiei *aplicării* ei în ştiinţe. Noua perspectivă de abordare are ca obiective centrale: statutul ontologic, epistemologic şi metodologic al matematicii aplicate, devenirea (progresul) cunoaşterii matematice, impactul calculatoarelor asupra matematicii. În realitate, este o perspectivă

firească, subliniată şi de A. Mostowski, care afirma că „*elucidarea naturii matematici nu revine matematicii, ci filosofiei*", dar din perspectiva unor „concepţii filosofice care nu rup matematica de restul ştiinţei, ci ţin seamă de proveniența ei din ştiinţele naturii, de aplicarea ei, de legăturile ei cu alte ştiinţe, de istoria ei". Este evident că amploarea relevanţei cercetării fundaţionale a matematicii acoperă şi „*săgeata implicaţiei spre filosofie*", adică analiza filosofică se aplică unei „substanţe" fecunde subiacentă demersului fundaţional pe care urmează s-o explice, s-o comenteze. „Registrul" oferit de matematica „pură" este acum completat cu o tematică ce vizează *progresul* matematicii, matematica *aplicată* şi *semnificaţiile impactului calculatoarelor* asupra matematicii, ale *interacţiunii matematicii pure cu matematica aplicată.*

În ceea ce priveşte prima săgeată, şi anume, „problema obiectiv-principală" a studiului, *implicarea filosofiei în cercetarea fundaţională*, atitudinea noastră este formulată ca o pledoarie în favoarea competenţei filosofiei în investigaţiile fundaţionale. În opinia noastră, „piatra de încercare" a acestei competenţe fructuoase, eficiente, o reprezintă «*the problem of foundation*». Din perspectiva static-structurală care a dat seamă, în principal, de modul de gândire matematică deductiv-axiomatic, ce „s-a constituit ca o tradiţie a filosofiei matematicii pure", prin contribuţiile remarcabile ale congreselor internaţionale de Logică, Metodologie şi Filosofie a Ştiinţei – Königsberg (1931), Stanford (1960) şi cele ulterioare – şi care au abordat o tematică specifică marilor programe fundaţioniste (logicismul, formalismul, intuiţionismul), *problema fundării* a fost confruntată cu dificultăţi insurmontabile. Eşecul programului hilbertian – demonstraţia finitist-metamatematică a consistenţei matematicii clasice – program condensat în formula „să mutăm odată pentru totdeauna fundamentele matematicii în interiorul matematicii", a marcat incapacitatea abordării sintactice, intern-matematice a *problemei fundării.* Fundaţionalismul a fost părăsit, interesul cercetătorilor îndreptându-se nu spre studiul programelor fundaţioniste, ci spre problematica aplicării *matematicii, a modalităţilor matematizării* diferitelor discipline, a *evoluţiei* teoriilor şi *programelor* în cunoaşterea matematicii, *a calculatoarelor*, en

vogue: „rolul şi limitele matematizării ştiinţei (vezi Congrese 1975, 1978, 1979, 1983). S-a considrat legitimă *abandonarea completă* a problemei fundării matematicii. „Fundamentele încetează de a mai fi metafora potrivită" (Quine); idei asemănătoare susţin N. Martin [1] şi I. Lakatos [2]. Eşecul fundaţionalismului, în forma lui „*tare*", ca formalism hilbertian, a avut însă mai curând o semnificaţie care argumentează menirea filosofiei în cercetarea fundaţională a matematicii şi anume, a indicat limitele cercetării „*pur matematice*" ale temeiurilor cunoaşterii matematice, insuficienţa instrumentelor formale ale matematicii în abordarea problemei fundării; această situaţie epistemologic-metodologică argumentează relevant o aserţiune citată, deja, a lui S. Kripke [1]: „Nu există un substitut matematic pentru filosofie". Nici în celelalte programe fundaţioniste – *logicismul* şi *intuiţionismul – destinul problemei fundării nu a fost mai fericit* (bun): *logicismul* este primul curent în filosofia matematicii, care a iniţiat studiul modern al fundamentelor matematicii, dar el nu şi-a realizat intenţia sa originară, întemeierea (fundarea) matematicii prin reducerea ei la logică; *intuiţionismul* – o filosofie a matematicii profundă şi originală, a continuat concepţia unor matematicieni ca Kronecker, Weierstrass, Lebesque, Borel, Poincaré, iar filosofic se revendică, ca şi formalismul, din kantianism şi este esenţialmente reductibil la „*mentalism*" şi „*metafizică*" (H. B. Curry [1]). El a oferit o bază ontologică şi metodologică insuficientă pentru *problema fundării*, pentru construirea şi justificarea matematicii; este o filosofie incapabilă să ofere o structură care să se substituie matematicii clasice.

Eşecurile fundaţionalismului, în ipostazele logicismului, formalismului şi intuiţionismului nu au fost interpretate corect, semnificaţia lor generală a fost pusă în serviciul concluziei că, o *fundare filosofică* a matematicii, dacă nu este imposibilă, rămâne, oricum, irelevantă. Rezultatele gödeliene a căror semnificaţie logică, epistemologică este, cum am mai afirmat, o *schimbare profundă de viziune asupra raţionalităţii umane*, concluzia formulată de Kripke la analiza valorii şi limitelor cercetării pur matematice a problemei fundării, ca şi aserţiunea lui Mostowski (elucidarea naturii matematicii aparţine

filosofiei şi nu matematicii), argumentează ideea că *fundarea filosofică* a matematicii rămâne fascinantă şi provocatoare.

Pentru a contura statutul filosofiei, ca o componentă a cercetării fundaționale a matematicii, ca şi modalitățile ei de implicare în acest demers, este necesar să-l descriem sumar.

Cercetarea fundațională a matematicii reprezintă o cunoaştere de ordinul doi, care se exercită asupra matematicii preexistente şi are ca probleme specifice: unificarea limbajului teoriilor matematice; reconstrucția conceptelor şi teoriilor matematice; explicitarea presupozițiilor sistemelor matematice, formularea exactă a tipurilor de raționament şi a construcțiilor matematice intuitive; identificarea „anteriorității" teoretice şi filosofice a diferitelor structuri şi teorii matematice, stabilirea relațiilor interteoretice, definirea riguroasă a conceptelor metateoretice implicate în evaluarea rezultatelor matematice. După G. Kreisel [1], cercetarea fundațională include trei aspecte: *logice* (fundamentele logice au ca obiect *demonstrația*, structura logică a teoriei matematice ca discurs independent de „substanța" sa particulară); *matematice* (fundamentele matematice depăşesc abordarea formală proprie fundamentelor logice, asigurând o abordare comprehensivă a teoriilor şi conceptelor matematice, ce vizează semnificația lor; aici interesează construcția conceptelor şi teoriilor de bază cu funcție de fundare a întregii arhitectonici a matematicii); *filosofice* (fundamentele filosofice au ca obiectiv relevarea „*prealabilului*" *filosofic, epistemologic* şi *metodologic*, în fapt explicitarea supozițiilor epistemologice şi a „angajărilor" ontologice ale teoriei matematice investigate. Aici cercetarea metateoretică ia forma unei analize critice, filosofice). Dacă adaptăm la matematică considerațiile lui M. Bunge [1]) despre cercetarea fundațională ca demers complex analitic şi constructiv (activități critice şi activități constructive), atunci *primele* acoperă prezența elementului filosofic în forma analizelor, explicațiilor şi comentariilor neformale, relevante în principal în sfera „*semnificațiilor*", iar cele *constructive* sunt relevante pentru fundamentele matematicii şi fundamentele logice. Noi (vezi M. Țurlea [1]) am distins în sfera activității fundaționale două componente: „*relevanță filosofică*" şi

„*tehnică fundațională*" pe care le-am descris mai specificat în vederea obținerii unui plus de claritate care, însă, restituie noțiunile folosite de Kreisel şi Bunge în context. Cum activitățile *constructive*, ca aspect al cercetării fundaționale oferă o *reconstrucție fundațională a matematicii efective*, constând în explicitarea „*the source theories*" ale porțiunii, regiunii matematice investigate, pe scurt „*fundamentele matematicii*", noi concludem că într-o primă aproximație cercetarea fundațională reprezintă o „reuniune" a *filosofiei* şi *fundamentelor matematicii* (activități *critice – conceptual filosofice* – şi cele *constructive*, care au un pronunțat caracter tehnic fundațional logico-matematic); deşi sunt distincte, comportă relații specifice permeabile: de exemplu, după P. Suppes, axiomatizarea, formalizarea potențează *analiza filosofică* prin producerea unei clarități dezirabile a rezultatelor; după cum clarificările filosofice se dovedesc un preliminar la *analiza fundațională*. De fapt, s-a şi spus că *analiza fundațională* (H. Wang [3]), ca *reducție* a conceptelor noi în termenii unora mai elementare, şi *justificare* a principiilor unor teorii matematice, în aceeaşi manieră, constituie o variantă a metodei *analizei conceptuale*, relevantă pentru logica ştiinței (vezi R. Carnap [2]). Pentru o identificare mai adecvată a modalităților de *implicare* a filosofiei în cercetarea fundațională a matematicii, noi credem că o analiză mai detaliată a cercetării fundaționale arată că ea conectează următoarele domenii de gândire: matematica propriu-zisă, fundamentele matematicii, metamatematica, filosofia matematicii şi filosofia generală, o reprezentare care ni se pare mai *productivă* în investigații, schițată de noi în cap. I. Facem aici doar observația că, în această „*schemă*" conexiunile dintre *filosofia matematicii* şi *filosofia generală* sunt mai uşor de identificat. Astfel, cele trei programe-perspective fundaționiste (*logicismul, intuiționismul, formalismul*) au reluat în domeniul filosofiei matematicii marile soluții filosofice la *problema existenței universalului* (problema *universaliilor*), *realismul, nominalismul* şi *conceptualismul* (vezi W. v. O. Quine [4, p. 128]).

„*Dosarul*" *problemei fundării* matematicii poate fi „*redeschis*", iar rolul filosofiei în procesul fundării, reabilitat. Acest rol poate fi reexaminat chiar în cadrul *filosofiei matematicii* „*pure*", care a acumulat

o tradiție impresionantă; ne referim la literatura legată de ceea ce numim *mari programe fundaționiste (logicism, formalism, intuiționism)* și *programele fundaționale (teorii axiomatice ale mulțimii, teoria structurilor – Bourbaki,și teoria categoriilor – cathegory theory).* A *doua modalitate de abordare a implicării filosofiei în demersul fundațional vizează o nouă paradigmă a matematicii*, un nou context fundațional în care ingredienții principali vor fi: *dinamica* cunoașterii matematice, *matematica aplicată* și *impactul computerelor asupra matematicii.* Problema fundării reprezintă problema „fundamentală" a cercetării fundaționale și de aceea constituie un test relevant pentru rolul fundațional al filosofiei.

***

Abordăm sumar *problema fundării* în ipostaza *filosofiei matematicii pure*".

Noțiunea de *fundare*, degajată de conotații metaforice uzuale, are menirea să avanseze fundamente pentru o clasă de concepte și principii prin intermediul analizei în termeni „*mai fundamentali*" (Kreisel [2]) prin operațiile *reducției* conceptelor și *justificării* principiilor. Problema fundării comportă două aspecte: *obiectivitatea* matematicii (entitățile matematice sunt obiective?) și *certitudinea* matematicii, justificarea certitudinii cunoașterii matematice (Hilbert a vrut să stabilească odată pentru totdeauna „certitudinea metodelor ei", fundarea unui „model de *certitudine* și *adevăr*"); mai sintetic, aspectul certitudinii vrea să spună: aserțiunile noastre despre entitățile matematice sunt certe? Cele două aspecte – *obiectivitatea* și *certitudinea* – alcătuiesc problema generală: *Ce este matematica?* Explicitarea acestor ingredienți ai problemei fundării conduc la „*bifurcarea*" ei în problema *naturii* matematicii și problema *structurii* matematicii cu interconexiuni profunde și fertile pe care abordarea trebuie să le identifice și să le distingă. Această distincție dintre *natura matematicii* (o problemă filosofică esențială în filosofia matematicii) și *structura* matematicii, (o problemă „tehnică" în domeniul fundațional, ținând de competența fundamentelor logice, dar mai cu

seamă a fundamentelor matematice pentru matematică), întemeiază coerent *diviziunea* cercetării fundaționale în componentele: filosofică şi tehnic-fundațională (= fundamente logice şi fundamente matematice), care nu au un statut aşa „pur" şi distinct. Aceste explicitări ale aspectelor problemei fundării ne-au condus la formularea unei distincții de perspectivă în abordarea problemei, după știința noastră neidentificată în literatura de specialitate şi extrem de eficientă, cel puțin prin eliminarea confuziilor, ambiguităților. Este vorba de distincția *„fundaționist-fundațional"* (vezi M. Țurlea [1]). În consecință, am distins în sfera cercetării fundaționale între *abordări fundaționiste* şi *abordări fundaționale*, respectiv *programe fundaționiste* (care cercetează problema *naturii* esențiale a matematicii, a statutului entităților matematice, pe scurt *problema existenței*, în matematică, o problemă prin excelență filosofică şi deci, de competența filosofiei) şi *programe fundaționale* care vizează studiul *structurii, organizării, „arhitecturii"* matematicii. Distincția urmează criteriul prevalenței aspectelor: *„filosofic"* sau *„tehnico-matematic"*, primul dominant în structura programelor fundaționiste, al doilea prezent prin excelență în programele fundaționale. Credem că şi problema statutului obiectelor matematice ține de abordarea fundațională. Repetăm, aceste perspective nu sunt aşa *„pure"*; într-adevăr, programele fundaționale au de-a face cu *reconstrucția fundațională* a edificiului matematicii, al unor teorii matematice, având sarcina explicitării «*teoriilor-sursă*» ale acestora, dar şi ale angajamentelor ontologice, epistemologice. Urmează că în această reconstrucție vom distinge un *„strat"*, nivel *ontologic*, şi deci un *formalism metafizic*, alături de *formalismele logic* şi *matematic*. Să adăugăm că, mai ales fundamentele logice ale matematicii nu sunt aşa „pure". Detectăm infiltrații la acest nivel, deoarece *problema justificării* şi *validității fundamentelor* (*axiomatice*) are o încărcătură filosofică, de exemplu *justificarea axiomei infinitului* face referire la *angajamentele „ontice" ale teoriei respective*, locuri de interferență ale fundamentelor logice cu asumpții ontologice, în care primele sunt un *„travesti"* ale acestora din urmă. Avem aici o modalitate de explicitare a ceea ce numim *„relevanță*

filosofică" a analizei fundaționale, o activitate specifică programelor fundaționale. Deşi marile programe fundaționiste vizează *problema realității* în matematică, apreciate esențial ca *teze filosofice generale absolutiste*, ele au ca particularitate distinctivă faptul de a fi şi *programe metateoretice* (vezi St. Körner [1]), ipoteză în care procedează la un studiu exact intern matematic şi logico-matematic al cunoaşterii matematice. Bogăția de *rezultate metamatematice neînsoțite de o analiză filosofică corespunzătoare* la care se referă Gödel [1] *sunt datorate cercetărilor metateoretice* pe care marile curente – logicismul, formalismul şi intuiționismul – le-au produs.

Concepția filosofică subiacentă acestor mari programe fundaționiste generează un „*absolutism*" metodologic, accentuând un aspect: *logica* (logicismul), *limbajul* (formalismul), *construcția* (intuiționismul). În virtutea acestui *absolutism*, aceste programe fundaționiste rămân (sunt) reconstrucții complementare, dar care ar putea fi valorificate într-o *perspectivă integrativă.*

Referitor la marile *programe fundaționale* ale matematicii, observăm că *programul axiomatic set-teoretic* (Zermelo, Zermelo-Fraenkel, von Neumann, Gödel, Bernays, Quine, Wang etc.), deşi centrat pe *structura* matematicii, nu evită prezența elementelor filosofice, având o remarcabişlă *relevanță ontologică*, ce derivă din conexiunile cu *problema existenței în matematică* şi a studiului obiectelor pe care le manipulează aceste sisteme axiomatice ale teoriei mulțimilor. Teorii ale structurilor (programul Bourbaki) şi categoriilor au mai curând implicații epistemologice conectate ierarhiei de construcții conceptuale, pe care ele le produc şi sugerează o „*erodare crescândă a concepțiilor platonist-substanțialiste* asupra matematicii. În plan strict fundațional pentru asigurarea unei eficiențe în reconstrucțiile matematicii s-au făcut mai multe tentative: a) fundațiile set-teoretice pentru teoria categoriilor (Feferman S); b) fundațiile categoriale ale teoriei mulțimilor (S. MacLane); chiar încercarea de *auto-fundare* a teoriei categoriilor (Engler E. şi Rohrl M.). S. MacLane crede că situația fundațională atestă că fundațiile set-teoretice şi fundațiile categoriale sunt echivalente. El

formulează concluzia că trebuie părăsită ideea fundării *unice* şi *universale* a matematicii în favoarea adoptării unei perspective *pluraliste*, a unor „*fundamente multiple*", a unor „*sisteme multiple pentru fundamente*", în realitate un „*omolog-replică*" *al logicismului pluralistic*, cu o *bază de convergenţă* a celor trei mari curente din filosofia matematicii – logicismul, intuiţionismul – convergenţă şi cooperare în detrimentul divergenţelor şi competitivităţii, un *aspect sub presiunea datelor fundaţionale*, a rezultatelor metateoretice, în particular metamatematice. Matematica efectivă (practica ei) impune şi favorizează azi *structurile* şi *categoriile* în care mulţi cercetători văd un „*optimum*" *alternativ* (la „bătrâna" teorie a mulţimilor) în clarificările fundaţionale şi o mai mare „sensibilizare" şi „prizare" a *matematicianului care lucrează (working mathematician)*, care ignoră *problema fundamentului*. Preţul plătit prin renunţare la locul privilegiat atribuit teoriei mulţimilor este sacrificarea celei mai complexe şi semnificative substanţe filosofice încorporată chiar în noţiunea fundamentală de mulţime, care a stimulat enorm filosofia matematicii.

Consonant cu remarca lui Mostowski despre „pierderea caracterului filosofic al cercetărilor fundaţionale", dar şi cu evoluţiile din cadrul marilor programe fundaţioniste aflate sub impactul practicii matematice (încorporate în rezultate metamatematice semnificative pe care nu le comentăm aici), L. Henkin [1] a propus înlocuirea schemei fundaţioniste „*logicism-formalism-intuiţionism*" cu schema fundaţională „*aspecte set teoretice – aspecte algebrice – aspecte constructive*", o schemă care reflectă „în viziunea autorului ei, „*tranziţia*" *accelerată de la filosofie la matematică*; deci, o schemă mai relevantă pentru actualul stadiu al cercetării fundaţionale. Irelevenţa schemei fundaţioniste s-ar explica prin caracterul filosofic al noţiunilor lor, inoperante în activitatea fundaţională, care ar deveni esenţialmente matematică. El indică o *continuitate* între cele două scheme (noţiunile *set teoretice* formează o parte a *logicismului*, cele *algebrice* sunt legate de *abordarea formalistă*, iar elementele *constructive* se nasc din spiritul care l-a determinat pe Brouwer să construiască *intuiţionismul*), dar arată şi diferenţele care le

separă. Marile programe fundaționiste s-au construit ca „*viziuni competitive*" asupra fundamentelor matematicii, în timp ce elementele schemei Henkin favorizează „*cooperarea*" în descrierea activității fundaționale. Dar, schema lui Henkin, adept al nominalismului, nu spune ceva semnificativ despre natura entităților pe care le manipulează. Deşi caracterul competitiv al curentelor fundaționiste din filosofia matematicii s-a mai atenuat, nu se constată o tendință de unificare a filosofilor matematicii *într-o unică direcție interpretativă*, la care firesc ar fi obligat progresele din matematică şi din sfera activității fundaționale. Se observă aici, ca şi în investigațiile făcute în programele fundaționale, un gen de *pluralism fundaționist*, eliminarea şcolilor filosofice nu se produce, dar nici ideea „*egalității* lor ontologice" (Robinson) nu câştigă teren, căci nu se întâmplă ca cineva să adere, simultan, la două filosofii incompatibile, cum este cazul platonism-formalism, care sunt incompatibile din punct de vedere al credințelor filosofice, sau formalism şi constructivism, opuse din punctul de vedere al practicilor.

Concluzia finală impusă de examinarea statutului ontologic, epistemologic şi metodologic al matematicii „pure" este că filosofia participă la fundarea matematicii într-un sens „*tare*", aproape în sens „*strict*". Sperăm că analiza noastră a decelat elementele necesare ale argumentării acestei poziții. Numim o *fundare filosofică* a matematicii în sens „*tare*", când filosofia este implicată în ambele sub-probleme explicitate prin „*bifurcarea*" problemei fundării, şi anume, *problema* „*naturii matematicii*" şi „*problema structurii matematicii*". Sintetizând, toată lumea pare convinsă de competența filosofiei în prima problemă, cea a *naturii matematicii*, autorii remarcabili în literatura de specialitate subliniind acest aspect, care a constituit „*miezul*" tematicii abordate de programele fundaționiste; este, de fapt, *problema existenței în matematică*, a statutului obiectelor matematice. Referitor la cea de-a doua problemă, cea a *structurii* matematicii, în cel mai bun caz constatăm reticențe sau prezența unor aserțiuni izolate, unele relevante, dar care nu sunt articulate coerent într-un punct de vedere. Noi vedem aici posibilitatea reprezentării mai corecte a lucrurilor în domeniul problemei

fundării vis-à-vis de filosofie. Teoriile matematice comportă anumite *supoziții* referitoare la *problema existenței* (realității) în matematică, pe care orice reconstrucție fundațională autentică și completă trebuie să le expliciteze; aceste asumpții ontologice („*strat*" ontologic) iau forma unui *formalism metafizic (filosofic),* distinct de formalismele *matematic* și *logic* ale teoriei construite sau reconstruite. Mai mult, chiar în aceste două formalisme care coincid cu ceea ce Kreisel a numit *fundamente matematice* și *fundamente logice* și care formează fundamentele matematicii (la nivelul cercetării fundaționale aparținând abordării fundaționale – tehnic formale cu instrumentație logică, matematică etc.), identificăm ceea ce metaforic am numit „*infiltrații tacite*" ale filosofiei. Putem vorbi mai specificat și anume, în cadrul fundamentelor matematicii, acest „fenomen" al penetrării filosofiei este prezent la palierul *fundamentelor logice*, atunci când se pune problema *justificării* și *validității* fundamentelor axiomatice (mai simplu, ale axiomelor). O ilustrare a acestei idei este „justificarea" axiomei infinitului. Identificăm „*locuri*" de *interferență a fundamentelor logice cu asumpții ontologice*, care au caracter pregnant filosofic, o situație în care se poate aprecia că fundamentele logice constituie un „*travesti*" al filosofiei în orizontul *fundamentelor matematicii*, despre care putem afirma acum că nu sunt așa „*pure*" ca *specific matematic* și care, în maniera „ortodoxă", s-a crezut că ar fi relevante exclusiv prin „tehnici fundaționale", cu caracter matematic și logico-matematic; o implicare evidentă a filosofiei și în „componenta tehnică" a fundării matematicii.

***

Perspectiva *static-structurală* a dat seama de modul de gândire axiomatic. Perspectiva *dinamică* insistă asupra ideii de *evoluție* a cunoașterii matematice. Într-adevăr, de la „*Elementele*" lui Euclid și până la *teoria catastrofelor* a lui R. Thom, gândirea matematică a parcurs câteva «*moduri de gândire matematică*»: *axiomatic-structural, algoritmic, constructiv.* Modul de gândire matematică (vezi H. Weyl [1]) este tipul de teoretizare, conceptualizare. Teoriile evoluției matematice trebuie să identifice trecerea,

legăturile şi ordonarea acestor moduri de gândire. Marile opere din filosofia matematicii au avut intenţia explicitării acestor moduri (Aristotel în „*Analiticele Secunde*" a descris modul de gândire axiomatic intuitiv, „*Comentariile*" lui Proclus pe cel axiomatic-semiconstructiv, „*Discursul*" cartezian a expus modul de gândire analitico-sintetic, iar Kant în „*Critica raţiunii pure*", pe cel constructiv-clasic. G. Frege în „*Foundations of Arithmetics*" a expus modul de gândire logicist, Hilbert în „*Axiomatic thinking*", pe cel axiomatic formalizat şi Brouwer a formulat modul de gândire constructiv în „*On Foundations of Science*". Problema legitimă astăzi este, în ce mod filosofia este utilă şi eficace în investigarea stadiilor actuale de evoluţie a matematicii? Perspectiva de studiu asupra progresului cunoaşterii matematice introduce aspecte, inedite în cea structural-statică, cum ar fi *originea, evoluţia* şi *aplicaţiile* acestei ştiinţe, prilej cu care rolul filosofiei în «*problema fundării*» suferă o modificare: de la un rol „*tare*", descris anterior, la unul mai „*slab*", «al *înţelegerii*» acestei practici efective a matematicii.

Matematica *aplicată* se conturează ca o activitate originală, ireductibilă, cu obiective, structuri teoretice şi educaţionale distincte, probate de practica acestui domeniu; interesează prioritar o analiză epistemologică a obiectului matematicii aplicate, a logicii subiacente, a tipurilor de raţionament, a conexiunilor ei cu matematica „pură". Fenomenul matematizării ştiinţelor, generalizarea aplicării matematicii, ca şi poziţia „*sui generis*" a matematicii în ansamblul cunoaşterii, între ştiinţele naturii şi cele umane, induc ipoteza unei *relevanţe* a acestui tip de investigaţie asupra matematicii, dincolo de domeniul ei. Este deja ştiut că tipul de teoretizare în ştiinţe este determinat de modalitatea matematizării teoriilor din acestea, şi că pe această bază se obţine explicarea unor aspecte structural dinamice şi metodologice ale acestora; o importanţă deosebită o prezintă modelele matematice în aceste ştiinţe.

***

Impactul calculatoarelor asupra matematicii a dus la constituirea unui *stil nou de gândire*, la rolul deosebit al unei intuiţii noi care ghidează

cercetarea, la relevarea rolului ideilor matematicii calculatorii, combinatoriale (Leibniz), la reconsiderarea relației intuitiv-simbolic. Analize speciale sunt necesare privind demonstrarea „mecanică", un ideal prezent în operele lui Leibniz, Peano, Hilbert, Herbrand, J. Robinson, M. Davis şi H. Putnam, unde un loc specific îl are studiul procedeelor de decizie, al raționamentului linear etc. Se impune regândirea statutului matematicii şi logicii, al unor concepte metateoretice: rezolvabilitate, efectivitate, demonstrație, problemă; semnificațiile teoremei celor patru culori pentru demonstrație, îmbinarea matematicii pure cu cea computațională; introducerea experimentelor empirice în matematică; rediscutarea distincției matematică-ştiințe ale naturii. Prima propoziție matematică cunoscută a posteriori; simțim nevoia ajutorului filosofiei *să înțelegem* «*ceea ce într-adevăr există*», ce se include în matematică, ce reprezintă matematica aplicată, în ansamblul interconexiunilor ei cu matematica pură şi ştiințele naturii şi cele umane, efectele ei de rezonanță în întregul cunoaşterii umane.

BIBLIOGRAFIE

APOSTLE, H. G.

[1]: *Aristotel's Philosophy of Mathematics* – University of Chicago Press, Chicago, 1952.

APOSTEL, L.

[1]: *The Justification of Set Theories.*

ARISTOTEL

[1]: *Analitice Secunde,* in *Organon*, vol. III, Editura Ştiinţifică, Bucu-reşti, 1961.

[2]: *Metafizica,* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1965.

[3]: *Fizica,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

[4]: *Analitice Prime,* în *Organon*, vol. II, Editura Ştiinţifică, Bucure;ti, 1958.

[5]: *Despre Suflet*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

[6]: *Categoriile,* în *Organon,* vol. I, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1957.

BAGDASAR, N.

[1]: *Studiu introductiv*, la Imm Kant: *Critica raţiunii pure,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

BANU, I.

[1]: *Platon şi platonismul,* studiu introductiv la Platon: *Opere,* vol. I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1975.

BARKER, S. F.

[1]: *Realism as Philosophy of Mathematics, in Foundations of Mathematics - Symposium Papers commemorating the Sixtieth Birhday of K. Gödel* - Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1969.

BĂDĂRĂU, D.

[1]: *Studiu introductiv şi Note* la „Metafizica", Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1965.

BECKER, O.

[1]: *Fundamentele matematicii,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds.)

[1]: *Philosophy of Mathematics,* Prentice Hall, 1964.

BERKELEY, G.

[1]: *A Treatise Concerning the Principle of Human Knowledge*, 1710.

BERNAYS, P.

[1]: *Some Doubts about the Eleatic Origin of Euclid's Axiomatics*, in Lakatos, I, [1].

[2]: *On Platonism*, in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) [1].

BETH, E. W.

[1]: *The Foundations of Mathematics*, North Holland. Publ. Co, Amsterdam, 1965.

BETH, E. W. and PIAGET, J.

[2]: *Mathematical Epistemology and Psychology*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland, 1966.

BETH, E. W.

[3]: *Science a Road to Wisdom*, D. Reidel, Publ., Co. Dordrecht, Holland, 1968.

BLACK, M.

[1]: *Conventionalism in Geometry and the Interpretation of necessary Statements*, P. S. pp. 335–349. (apud Torretti, R. [1])

BOOLE, G.

[1]: *Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, 1847.

BOURBAKI, N.

[1]: *Eléments d'histoire des mathematiques*, Paris, 1960.

[2] *Arhitectura matematicii* în Logică şi filosofie, E.P., Bucureşti, 1966

BOCHNER, S.

[1]: *Infinity*, in Ch. P. Wiener (ed.): *Dictionary of the History of Ideas. Studies of Selected pivotal Ideas*, Ch. Schreibner & Sons, New York, 1973.

BRIESKORN, E.

[1]: *Über die Dialektik in der Mathematik*, in M. Otto (hrsg) *Mathematiker über die Mathematik*, Springer, Berlin, 1974.

BRUNSCHVICG. L.

[1]: *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Libraire scientifique et technique. A. Blanchard, 9 rue de Medicis, 1972.

BUNGE, M.

[1]: *The Foundations of Physics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

CANTOR, G.

[1]: *Beiträge zur Begrüdung der transfiniten Mengenlehre, I, II*, in Math. Ann. 46 (1895) and 49 (1897).

CARNAP. R.

[1]: *On the logicist Foundations of Mathematics*, in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.): *Philosophy of Mathematics*, Prentice Hall, 1964.

[2]: *Logical Foundations of Probability,* Univ. of Chicago, Press, Chicago, 1951.

CHURCH. A.

[1]: *Matematică şi logică,* în *Logică şi filosofie,* Editura Politică, Bucureşti, 1966.

COPI, I. M. and GOULD, J. A.

[1]: (eds.) *Contemporary Readings in logical Theori,* Macmillan Company, New York, 1967.

COHEN, P.

[1]: *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* Benjamin, New York, 1966.

[2]: *Comments on the Foundations of Set Theory,* in *Ayiomatic Set Theory,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1971.

COSTABEL, P.

[1]: *Despre câteva vechi paradoxuri,* în J. L. Rigal: *Timpul şi gândirea fizică contemporană,* Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1972.

CURRY, H. B.

[1]: *The Foundations of mathematical Logic,* McGraw Hill, New York, 1963.

[2]: *Outline of a formalist Philosophy of Mathematics,* North Holland Publ. Co., Amsterdam, London, 1970.

[3]: *On the Definition and Nature of Mathematics* in Benacerraf, P. and Putnam, H. [1].

DAVIS, PH., & HERSCH. R.

[1]: *The Mathematical Experience,* Penguin Books British Library Bucharest.

DESCARTES, R.

[1]: *Reguli utile şi clare pentru îndrumarea minţii în cercetarea adevărului,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1964.

[2]: *Discurs asupra metodei,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1957.

[3]: *Meditaţii metafizice,* Editura Carter, Bucureşti, 1933 (referirile sunt date apud Beth [2]).

DIELS-KRANZ

[1]: *Fragmente der Vorsokratiker,* 6 Aufl. Berlin, 1951-1952, apud O. Becker [1].

DIOGENE LAERT

[1]: text citat după *Filosofia greacă până la Platon,* vol. I, partea a [2]: *Vorsokratiker, Philoloos, Frg.* B_4; 11 apud O. Becker [1].

DUMETT, M.

[1]: *Platonism,* 1967, in, *Truth and other Enigmas,* Harvard University, Press, Cambridge, Mass. 1978.

ERDMANN, B.

[1]: *The Axioms of Geometry,* 1877.

EUCLID
[1]: *Elementele.*
FRAENKIAN, A.
[1]: citat în *Filosofia greacă până la Platon,* vol. I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1979.
FREGE, G.
[1]: *Foundations of Arithmetic,* translated by J. L. Austin, Oxford, 1950.
GENTZEN, G.
[1]: *The Consistency of elementary Number Theory,* in Collected Papers, North.Holland, Publ. Co. Amsterdam, London, 1969.
GONSETH, F.
[1]: *Despre metodologia cercetărilor în fundamentele matematicii,* în *Logica ştiinţei,* Editura Politică, Bucureşti, 1970.
[2]: *Comment fonder une discipline exacte,* în „Dialectica", nr. 2/1966.
GOODMAN, N. D.
[1]: *Mathematics as an objective Science,* in The American Mathematicial Monthly 7/1979.
GOODMAN, N.
[1]: *A World of individuals* in Copi, J. M. and Gould. J. A. (eds.) *Contemporary Readings in logical Theory,* Mac Millan Company, New York, 1967.
[2]: *Problems and Projects,* Indianopolis: Hackett, 1978.
[3]: *The Structure of Appearance,* Harvard University Press 1951.
GÖDEL, K.
[1]: *Ce este problema continuumului a lui Cantor?* în *Epistemologie – Orientări contemporane,* Editura Politică, Bucureşti, 1974.
[2]: Russell's mathematical Logic în Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics,* Prentice Hall, 1964.
[3]: *Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes,* în „Dialectica", 12 (1958).
HATCHER, W. S.
[1]: *The Logical Foundations of Mathematics,* Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sidney, Paris, Frankfurt, 1982.
HEATH, TH.
[1]: *History of Greek Mathematics,* 2 vol. Oxford, 1921.
[2]: Mathematics in Aristotle, Oxford, 1949.
HELMHOLTZ, H. VON
[1]: *On the Origin and Significance of Geometrical Axioms,* in *Über Geometrie,* Darmstadt, Wissenschaftliche, Buchgesesellschaft, 1968.
HEMPEL, C. G.
[1]: *On the standard Conception of Scientific Theories,* in Rader, M. and Winokur, S.: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science,* IV, menţionat pentru opinia sa opusă celei a lui P. Suppes.

[2]: *Geometry and Empirical Science,* in *The American Mathematical Monthly,* vol. 52 (1946).

HENKIN, L.

[1]: *Mathematical Foundations for Mathematics,* in *The American mathematical Monthly,* 5 (1971).

[2]: *Nominalistic Analysis of mathematical Language,* în Logic, Methodology and Philosophy of Science, Standford University Press, California, 1962, (eds.) Nagel, E., Suppes, P., Tarski, A.

HEYTING, A.

[1]: *Some Remarks on Intituitionism,* in *Constructivity in Mathematics,* North Holland, Amsterdam, 1954.

[2]: *The Intuitionist Foundations of Mathematics,* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) [1], *Philosophy of Mathematics,* Prentice Hall, 1964.

[3]: *After Thirty Years,* in *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* edited by Ernest Nagel, Partick Suppes, Alfred Tarski, Stanford University Press, Copyright, 1962.

HILBERT, D.

[1]: *Gândirea axiomatică,* în vol. *Logică şi filosofie,* E.P., Bucureşti, 1966.

HILBERT, D. şi BERNAYS, P.

[2]: *Grundlagen der Mathematik,* vol. 1, Berlin, 1934.

[3]: *On the Infinite* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) [1] *Philosophy of Mathematics,* Prentice Hall, 1964; referirile sunt date şi după O. Becker [1].

HINTIKKA, J.

[1]: *Time and Necessity,* in *Aristotle's Theory of Modality,* Oxford Clarendon, Press, 1973.

[2]: *Despre ingredienţii unei ştiinţe aristotelice,* în *Revista de referate, recenzii şi sinteze,* 3/1973, CIDSP.

[3]: *Adevăr, informaţie şi inferenţă,* în *Epistemologie. Orientări contemporane,* Editura Politică, Bucureşti, 1974.

[4]: *Kant on the Mathematical Method, The Monist,* 52, p. 352-375.

HUME, D.

[1]: *A Treatise of Human Nature,* 1739-1740.

HUSSERL, E.

[1]: *Logicische Untersuchungen,* Max Niemeyer, Halle, 1913.

[2]: *Die idee der Phänomenologie,* 2, Aufl., în *Husserliana,* Band II, M. Nijhoff, Den Haag, 1958.

IAMBLICHOS

[1]: *Comentariu la aritmetica lui Nicomachos* (apud O. Becker [1]).

JACKON, M.

[1]: *On Plato's Late Theory of Ideas.*

KALMAR, L.
[1]: *On the Role of second Order Theories,* in Lakatos, I. (eds) [1].
KANT, IMM.
[1]: *Prolegomene,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1969.
[2]: *Critica raţiunii pure,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.
[3]: *Critica puterii de judecată,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.
[4]: *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte,* 1746.
[5]: *On the Form and the Principles of the sensible and inteligible World,* 1770, second edition.
[6]: *Kants gesammelte Schriften,* Berlin, 1920 (apud Torretti, R. [1]).
KLEENE, S.C.
[1]: *Introduction to Methamatematics,* North Holland Publ. Co. 1971.
KLEIN, J.
[1]: *Die Griechische Logistik und die Entstehung der Algebra,* Quellen u Studien z. Gesch. der Mathematik, vol. 3 (1934).
KNEALE, W. C.
[1]: *Priority in Use of Reductio ad Absurdum,* in Lakatos, I [1].
KNEALE, W. şi M.
[1]: *Dezvoltarea logicii,* vol. I, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1974, vol. II, 1975.
KÖRNER, S.
[1]: *Introducere în filosofia matematicii,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.
KREISEL, G.
[1]: *Proof Theory,* I, II, în *Journal of Symbolic Logic,* 3/1968.
[2]: *Perspectives in the Philosophy of pure Mathematics,* in *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* IV, Bucureşti, 1971.
[3]: *Hilbert's Programme,* in Benaceraff, P. and Putnam, H. (eds.) [1].
KRIPKE, S.
[1]: *Substantial Quantification,* in G. Evans, J. McDowell (eds.) „Meaning and Truth", London, Oxford, 1976.
LAKATOS, I.
[1]: *Problems in the Philosophy of Mathematics,* North Holland Publ. Co., Amsterdam, Londra, 1972.
[2]: *Mathematics, Science and Epistemology, Philosofical Papers,* vol. 2, Cambridge University Press, Londra, New York, Melbourne, 1978.
LEAR, J.
[1]: *Aristotle's Philosophy of Mathematics,* în "*The Philosophical Review*", April, 1982.
LEIBNIZ, G.W.
[1]: *Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz,* (apud Kneale W. şi M. [1]).

[2]: *Opuscules et fragments inedits de Leibniz,* ed. L. Couturat, Paris, Alcan, 1900.

[3]: *New Essays concerning human Understanding,* A. G. Langeley, New York, 1896.

[4]: *Monadologia,* in Leibniz, *Opere filosofice*, I, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972.

[5]: *De Scientia Universalis seu Calculo Philosophico,* ed. Latta, Oxford, 1898, apud Körner [1].

[6]: *Principles of Nature and Grace founded on Reason,* ed. Latta (apud Körner [1]).

LEMMON, E. J.

[1]: *Introduction to axiomatic Set Theory,* London, Rouledge and K. Paul Ltd., 1964.

LOCKE, J.

[1]: *Eseu asupra intelectului omenesc,* Editura Ştiinţifică Bucureşti, 1961.

LUCAS, J. R.

[1]: *Plato and the axiomatic Method,* in Lakatos, I. (ed.) [1].

MacLANE, S.

[1]: *Mathematical Models: A. Sketch for the Philosophy of Mathematics,* in *American Mathematical Monthly,* 86/1981, Nr. 7.

MADDY, P.

[1]: *Sets and Numbers,* in *Nõus* , 1981.

MARTIN, N.

[1]: *Mathematics and Foundations,* în K. Lorenz (Hrsg), Konstruktionen versus Positionen, Band I, Berlin, New York, W. de Gruyter, 1979.

MARTIN, R. M.

[1]: *Pragmatics, Truth and Language,* Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 38, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland.

MEHLBERG, H.

[1]: *The present Situation in the Philosophy of Mathematics,* in B. H. Kazemeir / D. Vuysje (eds.): *Logic and Language,* ©, 1962, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland.

MILL, J. S.

[1]: *A System of Logic,* London, 1843.

MOSTOWSKI, A.

[1]: *Stadiul actual al cercetărilor în fundamentele matematicii,* în vol. *Logica şi Filosofia,* Editura Politică, Bucureşti, 1966.

[2]: *Thirty Years of foundational Studies,* Blackwell, Oxford, 1966.

NAGEL, E. şi NEWMAN J.

[1]: *Gödel's Proof.* in I. M. Cop şi A. J. Gould [1].

NASTA, M.

[1]: *Note la Pythagoras*, în *Filosofia greacă până la Platon*, vol. I, partea a 2-a., Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1979.

NEUMANN, J. VON.

[1]: *The Foundations of Mathematics*, in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) [1].

[2]: *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, in J. von Neumann: *Collected works*, Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, vol. I, 1961.

[3]: *The Mathematician*, in J. von Neumann, in Collected works,Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, vol. I, 1961.

NEWTON, I.

[1]: *Optica*, Querry, 31.

[2]: (1713): *Principiile matematice ale filosofiei naturale*, Editura Acade-miei, Bucureşti, 1956.

(Referinţe bibliografice apud Lakatos, I. [2]).

PARSONS, CH.

[1]: *Mathematical Intuition*, Meeting of the Aristotelian Society, March 17, 1980.

[2]: *Kant's Philosophy of Aritmetic*, in S. Morgenbesser, P. Suppes and M. White (eds.) *Philosophy, Science and Method – Essays in honour of Ernest Nagel*, S. Martnis's Press, New York, 1969.

PASCAL, B,

[1]: *De l'esprit geometrique et de l'art de persuader*, 1658.

PÂRVU, I.

[1]: *Infinitul şi infinitatea lumii*, Editura Politică, Bucureşti, 1985.

[2]: *Existenţă şi realitate în ştiinţă şi filosofie*, E. P., Bucureşti, 1974.

PATZIG

[1]: *Silogistica aristotelică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1970.

PIAGET, J.

[1]: *Înţelepciunea şi iluziile filosofiei*, Editura Ştiinţifică Bucureşti, 1970.

PLATON

[1]: *Parmenide*.

[2]: *Timaios*.

[3]: *Epinomis*.

[4]: *Philebos*.

[5]: *Theetet*.

[6]: *Fedon*.

[7]: *Republica*.

[8]: *Fedru*.

[9]: *Sofistul*.

[10]: *Politicul*.

[11]: *Legile.*
[12]: *Menon.*
POINCARÉ, H.
[1]: *La Science et l'Hypothese,* Paris, Flammarion, 1968.
[2]: *La Valeur de la Science,* Paris, Flammarion, 1970.
[3]: *Dernieres Pensees,* Paris, Flammarion, 1963.
POPPER, K. R.
[1]: *Platon and crisis of early atomism,* în *Conjectures and Refutations. The Growth of scientific Knowledge,* Harper & Rows, Publishers, New York, Hagerstown, San Francisco, London, 1968.
[2]: *Epistemologie fără subiect cunoscător,* în *Epistemologie. Orientări contemporane,* Editura Politică, Bucureşti, 1974.
POZGANY, L.
[1]: *Liberal Intuitionism as a Basis for Set Theory,* în *Axiomatic Set Theory,* Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1971.
PRAWITZ, D.
[1]: *On the Idea of a general Proof Theory* in *Synthese,* nr. 27, 1974.
[2]: *Ideas and Results in Proof Theory,* in *The Second Scandinavian Logic Symposyum,* ed. J. E. Fenstad, North Holland Co., Amsterdam, 1971.
PROCLUS
[1]: *Comentariu* la *Elementele* lui Euclid, fragmente în Becker, O. (ed.) [1].
PUTNAM, H.,
[1]: *Models and Reality, Journal of Symbolic Logic,* vol. 45, nr. 3, September, 1980.
[2]: *Mathematics Matter and Method, Philosophical Papers,* volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1979.
QUINE, W.
[1]: *Două dogme ale empirismului,* în *Epistemologie. Orientări contemporane,* Editura Politică, Bucureşti, 1974.
QUINE & GOODMAN, N.
[2]: *Steps towards a constructive Nominalism,* în J.S.L., nr. 12/1974.
[3]: *Mathematical Logic,* revised edition, Cambridge, Mass., 1953.
[4]: *Set Theory and its Logic,* revised edition, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass, 1971.
[5]: *From a logical Point of View,* New York, Harper, second edition, 1953.
[6]: *On what there is?* in Benacerraf, P. and Putnam, H. [1].
[7]: *Word and Object,* The MIT Press Cambridge Mass. 1960.
RAMSEY, F. P.
The Foundations of Mathematics, Harcourt, Brace and Co. London, New York, 1931.

RAVEN, J. F.
[1]: *The presocratic Philosophers. A critical History with a Selection of Texts,* Cambridge, 1973.
REICHARDT, H.
[1]: *Introducere* la *Mică enciclopedie matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti.
ROBINSON, A.
[1]: *Concerning Progress in the Philosophy of Mathematics,* in *Logic Colloquium '73,* edited by H. E. Rose and J. C. Sheperdson, North Holland, Amsterdam, 1973.
[2]: *The Greeks and the excluded third*, in Lakatos, I. (ed.) [1]
[3]: *Formalism '64*, în *Logică şi filosofie,* Editura Politică, Bucureşti, 1966.
ROSSER, J. B.
[1]: *Extension of some Theorems of Gödel and Church,* în The Undecidable, M. Davis (ed.), Raven Press, 1964.
RUSSELL, B.
[1]: *Introduction to mathematical Philosophy,* London, Allen and Univ. 1930.
RUSSELL, B. and. WHITEHEAD, A. N.
[2]: *Principia Mathematica,* (Second Edition), Cambridge University Press, 1968.
[3]: *History of Western Philosophy,* London, George Allen & Unvin LTD, C, 1961.
[4]: An Essay on the Foundations of Geometry, New York, Dover, 1956.
[5]: Principles of Mathematics, Cambridge University Press, 1903.
SCHOLZ, H.
[1]: *Die Axiomatic der Alten,* în vol. *Mathesis Universalis,* Basel, Stuttgart, 1961.
SCHÜTTE, K.
[1]: *Gödel's Theorem,* în *Encyclopedia of Philosophy,* vol. II.
SKLAR, L.
[1]: *The conventionality of geometry,* în N. Rescher: *Studies in the Philosophy of Science,* Oxford, Basil Blackwell, 1966, pp. 42-60.
SKOLEM, TH.
[1]: *Review of Über die Grundlegung der Mengenlehre Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome,* by P. Finsler, Math. Z. 25 (1926).
STEGMÜLLER, W.
[1]: *The problem of universals and now,* în *Collected Papers,* on Epistemology, Philosophy of Science and History pf Philosophy, vol. I D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, Holland, 1977.
STUMPF, S. E.
[1]: *Philosophy, History and Problems,* ©, 1983, by McGraw Hill.
SUPPES, P.
[1]: *Dezirabilitatea formalizării în ştiinţă,* în *Epistemologie. Orientări contemporane,* Editura Politică, Bucureşti, 1974.

SZABO, A.
[1]: *Greek Dialectic and Euclid's Axiomatic,* în Lakatos, I, (ed.) [1].
[2]: Reply, în Lakatos, I. (ed.) [1].
TARSKI, A.
[1]: *Introduction à la logique,* Paris, Gauthier, Villars Louvain, E. Nauwelaerts, 1969.
TORRETTI, R.
[1]: *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré,* D. Reidel Publ. Co. Dordrecht; Holland, Boston, London, 1978.
TOTH, I.
[1]: *Ahile, Paradoxele eleate în fenomenologia spiritului,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.
ŢURLEA, M.
[1]: *Filosofia şi fundamentele matematicii,* Editura Acedemiei R. S. România, Bucureşti, 1982.
[2]: *Philosophy and foundational Research of Mathematics,* în *Revue Roumaine des Sciences Sociales,* Serie de Philosophie et Logique, nr. 2–3, 1983.
[3]: *Logic şi epistemologic – aspecte relevante în programele fundaţioniste ale matematicii,* în *Espitemologie şi analiza logică a limbajului,* Editura Politică, Bucureşti, 1975.
TYMOCZO, TH.
[1]: *The Four Color Problem and its Philosophical Significance,* în *The Journal of Philosophy,* vol. 76, 1979.
UEBERWEG, FR.
[1]: *The Principles of Geometry,* 1851.
WAERDEN, L. VAN
[1]: *Erwachende Wissenschaft,* Basel und Stuttgart, 1959.
WANG, H.
[1]: apud W. Stegmüller [1].
[2]: Survey of mathematical Logic, North Holland, Amsterdam, 1963.
[3]: Analiză, reducere şi formalizare, în Studii de logică matematică, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
WEYL. H.
[1]: *The mathematical Way,* in J. Newmann (ed.), The World of Mathematics, New York, Simon and Schuster, 1956, vol. I.
WEIZSÄCKER, C. F. VON
[1]: *Die Unendlichkeit der Welt,* in *Zum Weltbild,* 7 Aufl. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1957.
WHITEHEAD, A. N.
[1]: vezi Russell [2].
WITTGENSTEIN, L.
[1]: *Tractatus logico-philosophicus,* Paris, 1961.

Resume

The book is structured in the following chapters: I. the philosophy and the foundational research of mathematics; II. ancient history and philosophy of mathematics, III. modern philosophy of mathematics; IV. Kant's philosophy of mathematics; V. the present situation in the philosophy of mathematics. „*The philosophy of mathematics*" states a pluri- and inter-disciplinary approach of the issue, outlining a „*contact zone*" in which a series of disciplines (such as philosophy, logic, mathematics, metamathematics, history of mathematics) are in a strong and deep interaction with the practice of mathematics – the so called effective mathematics. The aims of the research are both at the level of the present state of affairs and baffling vaste, but the complete reading trip of the text it is hoped to convince about the success of the approach used. The mutual openings of different domains and genres of the foundational research and interrelations those have with the science of mathematics are stressed in the book. The unity of mathematics' style (ontological, epistemological and methodological); its remarkable characteristic to take part at the marking up of its own foundations, at the assessment of the ontological, epistemological methodological status of the mathematical entities are developed. The core of the script is made of the „interactive relation" 's problem between philosophy and mathematics – this being announced and especially approached in chapters I and V. The profitable valences for both theoretical disciplines – mathematics and philosophy – are identified and motivated with caution. In this context we show that the differences and divergences of opinion in the sphere of philosophical and foundational investigations of mathe-matics are the consequences of the „conflict" between present results (technical-mathematical and metamathematical), and the greatest of philosophical thought's main trends: platonism, aristotelism, kantianism etc. Much more, mathematics' great foundationalist programmes (logicism, formalism, intitutionism) are the *hypostases* of the general philosophy's trends – the realism, the nominalism, the conceptualism. On the one hand, if philosophy offers to mathematics a relevance about the ultimate roots of present divergences within philosophy and foundations of mathematics, on the other hand, different philosophies imposed by the modern researches can be used as actual tools and scripts to read and reinterpret being able to assign a more correct and profund understanding of the ancient, middle age and modern, philosophy's significations and messages. The first and last chapters offer explicitly the context which pointed out the approaches to that issue. The discourse retains, in a relevant and coher-

ent way, the relations' *constellation* among the great domains of mathematical thinking; mathematics, the foundations of mathematics, metamathematics, philosophy of mathematics, general (speculative) philosophy. A series of remarks – that are original – expressed explicit by enough the significant outline of the terms which designated the thought's domains above mentioned. The remarks, also formulated the conceptual, theoretical and methodological distinctions – warning in this way against the unauthorized use of them in the context of more subtle theoretical analysis (see the borders among philosophy of mathematics, foundations of mathematics and metamathematics.). The plea in the favour of „difference", „distinction", „separation", (but not „exclusiveness") has a counterbalance in the cautious identifications of the communication, the mutuality and complementarity among those domains – this being a phenomenon produced by the great mutations due to the foundational progresses. In these chapters (I, V) the logical and logico-mathematical approach is prevalent; in this case, the mathematical research appeals to the proceedings, methods and technics with a mathematical, logico-mathematical and metamathematical character. The last ones are in the service of the philosophical analysis and explanations – in the author's view this is the legitimation of the productive role of philosophy in the foundational research.

As regards chapters II, III and IV – these containing „historical" essence which has an actual relevance – the author not pretends (not claims) original contributions: he only states in a pertinent way the information due a vaste and up-to-date bibliography (which is subordinated to the approach used). Anyway, a series of personal notes regarding different issues can be identified, this being alongside with the systemical synthesis – that one facilitating the building of the research' script. This „script" is centered upon the relation between *„philosophy and mathematics"* and refers explicitly to the famous issue of *„mathematics' foundation"*. The last one is, according to the author, *forked* in two sub-problems; 1) that of *mathematics' nature*, which belongs to philosophy's vocation and competence; 2) that of *mathematics' structure*, that being more „technically" approached belongs to such disciplines as foundations of mathematics and metamathematics. In such a „script", philosophy of mathematics (besides of foundations of mathematics and metamathematics) finds its natural place. Through philosophy of mathematics is identified the channel of the general, „speculative" philosophy's „insertion" and „communication" in the *„contact zone"* of the significative domains of mathematics, foundational research (mathematics, foundations of mathematics, metamatematics, philosophy of mathematics and general philosophy). The philosophy will accompany differently the foundation's problem in the contexts of the approach, for example, at the pure mathematics' level, and at that of applied mathematics, and, finally, at the computers' impact. The philosophy's role, for which the author had also pleaded in M. Ţurlea [1], is speaking in metaphorical way placed under the *„cupola"* of the conceptual-methodological distinction: *„foundationist"–„foundational"* – which separates and generously assigns the competences to philosophy of mathematics, those of mathematics' foundations and metamathematics, respectively.

 BeatriceGloria_personal library